EINE ERWEITERUNG DES POISSONSCHEN GRENZWERTSATZES UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE RISIKOPROBLEME IN DER SACHVERSICHERUNG

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

WOLF-GÜNTER ACKERMANN
AUS FRANKFURT (ODER)

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 8. FEBRUAR 1939
TAG DER PROMOTION: 12. JULI 1939

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

38

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. P. RIEBESELL
PROFESSOR DR. A. KLOSE

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 4

Einleitung.

In der Sachversicherung zeigen sich immer mehr Bestrebungen, die Technik auf dieselbe mathematische Grundlage zu stellen, wie sie die Lebensversicherung bereits entwickelt hat. Daß diese Technik nicht nur erforderlich, sondern auch möglich ist, ist durch mehrere Arbeiten — vor allem von BURRAU[1]), RIEBESELL[2]) und GÜRTLER[3]) — bereits dargelegt.

Aufgabe dieser Arbeit ist es, Verfahren zur mathematischen Berechnung der Versicherungswerte in der Sachversicherung anzugeben.

Für die Durchführung war folgende Überlegung maßgebend: In jeder mathematischen Behandlung eines Problems muß man das Geschehen in der Natur durch idealisierende mathematische Annahmen ersetzen. Das Ergebnis wird um so genauer sein, je mehr diese dem wirklichen Ablauf gerecht werden. Dieser läßt sich bei den Problemen der Sachversicherung etwa folgendermaßen umreißen:

In einem Versicherungsbestand treten Schäden auf, der Zeitpunkt ihres Eintretens ist zufällig. Die Anzahl der Schäden in einem genügend langen Zeitabschnitt der Länge T sei λT; dabei ist also λ die auf die Zeiteinheit bezogene mittlere Schadenanzahl. Die Höhe x dieser Schäden ist ebenfalls zufällig, sie unterliege einer Summenverteilung $\Phi(x)$[4]), d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Höhe eines Schadens $\leqq x$ ist, sei $\Phi(x)$.

Das Risikoproblem in der Sachversicherung — an Beispielen werden wir zeigen, daß sich alle Risikoprobleme auf dieses eine zurückführen lassen — ist das folgende:

Ein Zeitabschnitt der Länge t sei vorgegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(X, t)$ dafür, daß die Summe aller in diesem Zeit-

1) A. Burrau, *Die Grundlagen der Versicherungsstatistik.* Wirtschaft und Recht der Versicherung 1924, Nr. 2.

2) a) P. Riebesell, *Gibt es eine Sachversicherungsmathematik?* Archiv für math. Wirtschafts- und Sozialforschung 1 (1935), S. 17—23. b) Ders., *Einführung in die Sachversicherungsmathematik.* Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungswissenschaft, Heft 56. Berlin 1936.

3) M. Gürtler, *Die Kalkulation der Versicherungsbetriebe.* Berlin 1936.

4) Wahrscheinlichkeitssummenverteilungen sind stets mit großen, die zugehörigen Verteilungsdichten bzw. Sprunghöhen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet.

abschnitt eingetretenen Schäden $\leqq X$ *ist?* Diese Summe werden wir, wie üblich, als Gesamtschaden bezeichnen.

Zeichnerisch dargestellt, ergibt sich folgendes Bild: Die Summe $X(\tau)$ aller im Zeitabschnitt $0, \ldots, \tau$ entstandenen Schäden, als Funktion der Zeit τ betrachtet, ist eine Treppenkurve (Abb. 1). Jedesmal wenn ein Schaden der Höhe x eintritt, erfährt $X(\tau)$ einen Sprung der Höhe x. Die Stufenhöhe ist also eine Zufallsgröße, die der Verteilung $\Phi(x)$ unterliegt. Die Stufenbreite ist der Zeitabstand zweier aufeinanderfolgender Schäden und somit ebenfalls eine zufällige Größe.

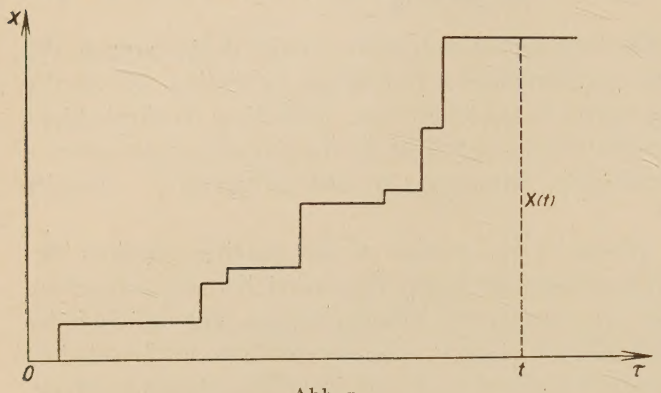

Abb. 1.

Die Bestimmung von $W(X, t)$ ist eine rein wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe, die folgendermaßen lautet:

Eine Veränderliche X *erfahre zu zufälligen Zeitpunkten Sprünge. Die Höhe* x *dieser Sprünge sei ebenfalls zufällig und unterliege der Summenverteilung* $\Phi(x)$. *Wie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung* $W(X, t)$ *der Gesamtsprunghöhe* $X(t)$ *im Zeitabschnitt* $0, \ldots, t$?

Die bisher unternommenen Versuche, die Verteilung $W(X, t)$ zu bestimmen, waren die folgenden:

1. Für den Fall, daß alle Sprünge die Höhe 1 haben, läßt sich zeigen[5]), daß $W(X, t)$ in die bekannte POISSONsche Formel

$$W(X, t) = \sum_{k=0}^{[X]} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \tag{1}$$

übergeht. Die Annahme gleich hoher Schäden steht aber viel zu wenig im Einklang mit den wirklichen Verhältnissen in der Sachversicherung, daher eignet sich (1) nicht für eine Sachversicherungsmathematik. Besser ist schon der folgende Ansatz:

2. Für den Fall, daß die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Schadens der Höhe 1 gleich φ_1, eines Schadens der Höhe 2 gleich

5) A. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik 2, Heft 4 (1933), S. 19.

$\varphi_2, \ldots,$ eines Schadens der Höhe k gleich φ_k ist, läßt sich die Formel[6])

$$(2) \qquad W(X,t) = e^{-\lambda t} \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + k\alpha_k \leqq [X]} \prod_{\nu=1}^{k} \frac{(\lambda t \varphi_\nu)^{\alpha_\nu}}{\alpha_\nu!}$$

angeben, die eine Erweiterung der Poissonschen Formel (1) ist. Zweifellos sind die (2) zugrunde liegenden Annahmen genauer als im Falle der Formel (1), aber auch sie werden den tatsächlichen Verhältnissen noch zu wenig gerecht. Außerdem ist (2) zur praktischen Rechnung wenig geeignet; denn die dabei auszuführenden Summationen sind — besonders für große X und k — sehr umständlich.

3. Unter der Annahme einer beliebigen Verteilung $\Phi(x)$ der Schadenshöhen haben Khintchine[7]), Bavli[8]) und Boehm[9]) die Verteilung $W(X, t)$ bestimmt. Die Formel, die sie dabei erhalten, ist eine Erweiterung der Formeln (1) und (2). Dieses *erweiterte Poissonsche Gesetz* werden wir in § 1 besprechen. Da die Verteilung Φ der Schadenshöhen ganz beliebig angenommen wird, entspricht dieses Gesetz weitgehend den wirklichen Verhältnissen. Wenn es gelingt, diese Formel der praktischen Rechnung zugänglich zu machen, läßt sich eine Mathematik der Sachversicherung darauf aufbauen. In der von Khintchine angegebenen Darstellung ist sie noch nicht zur numerischen Rechnung geeignet.

Aufgabe dieser Arbeit ist es daher, Verfahren zur numerischen Berechnung von $W(X, t)$ anzugeben. Das ist ein rein mathematisches Problem, das nicht nur für die Versicherung von Interesse ist. Daher sind diese rein mathematischen Überlegungen in einem mathematischen Teil der Arbeit (Teil I) von den versicherungstechnischen Anwendungen (Teil II) getrennt.

Im mathematischen Teil werden wir drei Verfahren entwickeln:

1. Wenn sich die Verteilungsdichte $\frac{d\Phi}{dx}$ als Exponentialkurve darstellen läßt, werden wir $W(X, t)$ auf Besselsche Funktionen zurückführen (§ 2).

2. Wenn λt klein ist, werden wir eine Rekursionsformel bzw. eine numerisch lösbare Integralgleichung aufstellen (§ 6).

---

6) A. a. O. 2a), S. 20 und a. a. O. 2b), S. 37.

7) A. a. O. 5).

8) G. M. Bavli, *Eine Verallgemeinerung des Poissonschen Grenzwertsatzes* (russisch mit deutschem Auszug). Comptes Rendus Acad. des Sciences URSS. 1935, II, S. 508—511.

9) C. Boehm, *Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie* I. Blätter für Versicherungsmath. 3 (1935), S. 197—215.

3. Wenn λt groß ist, werden wir eine Reihenentwicklung von $W(X, t)$ angeben und die Gesetzmäßigkeiten der Koeffizienten der Reihenglieder untersuchen (§ 7).

Im versicherungstechnischen Teil werden wir das so der Praxis zugänglich gemachte Gesetz auf die Berechnung der Versicherungswerte anwenden. Unsere Behauptung, die gesamte Mathematik der Sachversicherung lasse sich auf dieses Gesetz aufbauen, werden wir dadurch beweisen, daß wir die Nettoprämie (§ 1), den Risikozuschlag und die Nettoprämie des Rückversicherers (§ 5) bestimmen und Hinweise auf die Berechnungsmöglichkeiten der anderen interessierenden Werte geben werden. Wir werden dabei nach Wegen suchen müssen, die Verteilung Φ der Schadenshöhen für einen beliebigen Bestand zu ermitteln (§ 3).

Erster Teil.

Mathematische Betrachtungen.

§ 1. Das erweiterte Poissonsche Gesetz.

Die von KHINTCHINE vorgenommene Erweiterung des POISSONschen Gesetzes der seltenen Ereignisse lautet[10]):

Eine Veränderliche X erleide zu zufälligen Zeitpunkten Sprünge. Der Mittelwert der in jeder Zeiteinheit beobachteten Anzahl von Sprüngen sei λ. Die Höhe x eines Sprunges sei zufällig und unterliege der Summenverteilung $\Phi(x)$. Ferner sei $\Phi_k(x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe von k Sprüngen $\leqq x$ ist.

Da die Summe von 0 Sprüngen stets 0 ist, gilt

$$\Phi_0(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geqq 0. \end{cases}$$

Da die Summe *eines* Sprunges seine Sprunghöhe ist, wird

$$\Phi_1(x) = \Phi(x),$$

und schließlich ist für alle $k > 0$

$$\Phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k-1}(x - \xi)\, d\Phi(\xi).$$

10) A. a. O. 5).

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe aller im Zeitabschnitt 0, ..., t erfolgten Sprünge $\leqq X$ ist, ist dann nach KHINTCHINE durch

$$W(X, t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Phi_k(X) \tag{3}$$

gegeben. Dieses Gesetz ist tatsächlich eine Erweiterung des POISSONschen Gesetzes (1); denn für den Fall, daß jeder Sprung die Höhe 1 hat, ist $\Phi(x) = \varepsilon(x - 1)$ und damit $\Phi_k(x) = \varepsilon(x - k)$, und (3) geht in (1) über. Formel (3) nennen wir mit KHINTCHINE daher den erweiterten POISSONschen Grenzwertsatz.

Von ganz anderem Gesichtspunkte ist in einer versicherungstechnischen Betrachtung BOEHM[11]) auf diesen Satz gekommen: Es sei $v(k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Zeitabschnitt der Länge t genau k Sprünge eintreten. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe aller Sprünge $\leqq X$ ist, gleich der Summe über die Wahrscheinlichkeiten $v(k)\, \Phi_k(X)$ dafür, daß k Sprünge eintreten und deren Summe $\leqq X$ ist; d. h. es ist

$$W(X, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v(k)\, \Phi_k(X). \tag{3'}$$

Nach KHINTCHINE ist $v(k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, mithin geht (3') in (3) über.

Wir wollen an dieser Stelle einen neuen Beweis des erweiterten POISSONschen Satzes bringen, der den Vorteil hat, die Eigenart des hier vorliegenden Problems noch deutlicher zu machen.

Wir nehmen an, in jedem Zeitabschnitt der Länge $\frac{t}{n}$ sei nicht mehr als ein Sprung möglich, dessen Höhe x der Summenverteilung $\Phi(x)$ unterliege. Der Gesamtschaden $\overline{X}$ in diesem Zeitabschnitt ist eine Veränderliche mit der Summenverteilung $F_n(\overline{X})$. Dann ist also $\Phi(\overline{X})$ die bedingte Verteilung von $\overline{X}$ im Falle $\overline{X} \neq 0$. Demnach ist

$$F_n(0) = 1 - \frac{\lambda t}{n}, \qquad dF_n(\overline{X}) = \frac{\lambda t}{n}\, d\Phi(\overline{X}) \quad \text{für} \quad \overline{X} \neq 0. \tag{4}$$

Definieren wir ferner die „erzeugenden Funktionen"

$$\begin{cases} [w] = [w](z) = \int_{X=0}^{\infty} z^X\, dW(X, t), \\ [\varphi] = [\varphi](z) = \int_{0}^{\infty} z^x\, d\Phi(x), \\ [f_n] = [f_n](z) = \int_{0}^{\infty} z^x\, dF_n(x), \end{cases} \tag{5}$$

11) A. a. O. 9).

so ist nach (4)

$$[f_n] = 1 - \frac{\lambda t}{n} + \frac{\lambda t}{n}[\varphi] = 1 + \frac{\lambda t([\varphi] - 1)}{n}.$$

Die Verteilung $W_n(X, t)$ des Gesamtschadens im Zeitabschnitt der Länge t ist die Verteilung der Summe von n Veränderlichen $\overline{X}$. Wählen wir die Intervalleinteilung auf der Zeitstrecke beliebig fein, d. h. lassen wir n beliebig groß werden, so konvergiert $W_n(X, t)$ gegen die gesuchte Verteilung $W(X, t)$. Nun ist nach einem bekannten Satz über erzeugende Funktionen

$$[w_n] = [f_n]^n,$$

also $$[w] = \lim_{n\to\infty} [f_n]^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\lambda t([\varphi] - 1)}{n}\right)^n = e^{\lambda t([\varphi]-1)}.$$

Wie wir in § 3 zeigen werden, hat die Verteilung (3) dieselbe Erzeugende. Da aus der Gleichheit der Erzeugenden die Gleichheit der erzeugten Verteilungen folgt, so hat $W(X, t)$ tatsächlich die Form (3).

Obgleich W die Verteilung der Summe von $n \to \infty$ Veränderlichen ist, strebt es — wenigstens bei endlichem λt — nicht gegen die GAUSSsche Verteilung, wie es nach dem Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung vielleicht zu erwarten wäre. Man überzeugt sich leicht, daß die Bedingung des Fundamentalsatzes, die Streuung solle wie n gegen Unendlich streben, nicht erfüllt ist. Dagegen werden wir in § 7 zeigen, daß $W(X, t)$ für $\lambda t \to \infty$ gegen die GAUSSsche Verteilung strebt.

Ersichtlich werden wir stets — nicht nur bei seltenen, sondern auch bei beliebig häufigen Schadenereignissen — auf POISSONsche Verteilungen geführt, wenn wir das Problem so stellen, daß im Versicherungsbestand ein Schaden in jedem Augenblick mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten kann. Das ist der Fall, wenn jedes Versicherungsobjekt für die gesamte betrachtete Zeitdauer unter Risiko steht, also nicht etwa nach einem Schadeneintritt aus dem Bestand ausscheidet. In der Sachversicherung, wo ein Objekt mehrfach von einem Schaden betroffen werden kann, ist diese Bedingung erfüllt.

Von BAVLI[12]) wird dieser Satz folgendermaßen verallgemeinert: Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige zufällige Größen, wobei x_ν nur mit der Wahrscheinlichkeit α_ν von 0 verschieden ist. $H_\nu(x)$ sei die bedingte Verteilungsfunktion von x_ν im Falle $x_\nu \neq 0$. Ferner seien

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Max}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu H_\nu(x) = aH(x).$$

12) A. a. O. 8).

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Verteilungsfunktion von $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$ für $n \to \infty$ gegen

$$W(X) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \Phi_k(X)$$

mit $\Phi_0(x) = \varepsilon(x)$, $\Phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k-1}(x-\xi)\, dH(\xi)$.

Die Bavlische Verallgemeinerung wird im folgenden nicht benutzt werden.

Im Hinblick auf die Anwendungen interessiert $W(X, t)$ meist nur für feste Zeitabschnitte $0, \ldots, t$ als Funktion von X. Wir drücken daher die Abhängigkeit von t nur bei Bedarf aus und schreiben sonst $W(X)$.

Die Funktion $\Phi(x)$ haben wir als ganz beliebige Summenverteilung angenommen. Zeitweilig werden wir jedoch auch arithmetische oder geometrische Sonderfälle betrachten.

Ist Φ Treppenkurve einer äquidistanten arithmetischen Verteilung, so haben $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \ldots$ und W dieselbe Eigenschaft.

Ebenso folgt aus der Existenz von $\frac{d\Phi}{dx}$ die von $\frac{d\Phi_k}{dx}$ für alle $k \geqq 1$. Da ferner Φ_0 an allen Stellen außer $x = 0$ differenzierbar ist und die Reihe (3) wegen

$$\frac{(\lambda t)^k}{k!} \Phi_k(x) \leqq \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

gleichmäßig konvergiert, so folgt aus der Existenz von $\frac{d\Phi}{dx}$ die von $\frac{dW}{dx}$ an allen Stellen außer $x = 0$.

Lassen wir nur Sprünge mit positiver Höhe zu — diese Bedingung ist ja in der Sachversicherung erfüllt — so ist $\Phi(x) = 0$ und $d\Phi(x) = 0$ für alle $x < 0$, und der Integrand von $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-\xi)\, d\Phi(\xi)$ verschwindet für $\xi < 0$ und $\xi > x$. Es ist also

$$\Phi_2(x) = \int_0^x \Phi(x-\xi)\, d\Phi(\xi).$$

Ebenso folgert man weiter, daß

$$\Phi_k(x) = \int_0^x \Phi_{k-1}(x-\xi)\, d\Phi(\xi)$$

mit $\Phi_k(0) = 0$

für $k > 0$ gilt. Da nach Definition $\Phi_0(0) = 1$ ist, erhalten wir

$$W(0, t) = e^{-\lambda t}.$$

Das ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitabschnitt der Länge t die Summe aller Sprünge gleich 0 ist, d. h. daß keine Sprünge erfolgen.

Für die praktische Rechnung eignet sich die Formel (3) in der Darstellung von KHINTCHINE im allgemeinen nicht. Die Reihe (3) konvergiert so langsam, daß sie zur Rechnung nicht brauchbar ist. Denn erstens hat der Koeffizient $\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ sein Maximum für $k = \lambda t$, und zweitens nimmt die Folge der $\Phi_k(X)$ für große X — und wie die Anwendungen zeigen werden, interessieren gerade diese — erst sehr spät ab. Ganz abgesehen davon ist die Bildung der Φ_k sehr umständlich (vgl. das Beispiel in § 6, wo $W(X)$ für $\lambda t = 2$ nach der Formel (3) berechnet wird).

§ 2. Zurückführung von $W(X)$ auf Besselsche Funktionen.

In einem einzigen Fall hilft uns die Darstellung (3) weiter. Es ist dies der besondere Fall, daß sich die Verteilungsdichte von Φ durch eine Exponentialfunktion darstellen läßt. Er sei im folgenden behandelt. Wir setzen also

$$\lambda t \frac{d\Phi}{dx} = a e^{-bx}$$

und schreiben ferner

$$\frac{d\Phi}{dx} = \varphi(x), \qquad \frac{d\Phi_k}{dx} = \varphi_k(x), \qquad \frac{dW}{dx} = w(x).$$

Durch Induktion erhalten wir für alle $k > 0$

$$(\lambda t)^k \varphi_k(x) = \int_0^x \lambda t \varphi(x-\xi)(\lambda t)^{k-1} \varphi_{k-1}(\xi)\, d\xi = \int_0^x a e^{-b(x-\xi)} a^{k-1} e^{-b\xi} \frac{\xi^{k-2}}{(k-2)!} d\xi$$

$$= a^k e^{-bx} \int_0^x \frac{\xi^{k-2}}{(k-2)!} d\xi = a^k e^{-bx} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$

φ_0 existiert an allen Stellen außer $x = 0$, und zwar ist für $x \neq 0$

$$\varphi_0 = 0.$$

Nach der Bemerkung in § 1 existiert $\frac{dW}{dx}$ für alle $x \neq 0$. Es ist

$$\frac{dW}{dx} = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \varphi_k(x)}{k!}.$$

Nach Einführung der gefundenen Werte für φ_k erhalten wir

$$\frac{dW}{dx} = e^{-\lambda t} e^{-bx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k x^{k-1}}{(k-1)!\,k!} = e^{-\lambda t} a e^{-bx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!\,(k+1)!} \qquad (x \neq 0).$$

Bei Einführung der BESSELschen Funktion 1. Art und 1. Ordnung

$$J_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+1}}{\nu!\,(\nu+1)!}$$

wird

$$\frac{dW}{dx} = w(x) = e^{-\lambda t} a e^{-bx} \frac{J_1(2i\sqrt{ax})}{i\sqrt{ax}} \qquad (i = \sqrt{-1}). \tag{6}$$

Hierbei ergibt sich der Vorteil, daß die BESSELschen Funktionen tabuliert sind.[13]) Ob sich die Verteilung durch die Exponentialkurve wirklich wiedergeben läßt, muß von Fall zu Fall entschieden werden; was die Sachversicherung anbelangt, so hat RIEBESELL[14]) gezeigt, daß sich in vielen Zweigen für die Verteilung der Teilschäden diese Annahme tatsächlich machen läßt.

§ 3. Die Erzeugende für $W(X)$.

Läßt sich $\frac{d\Phi}{dx}$ nicht durch eine Exponentialkurve wiedergeben, so müssen wir nach anderen Verfahren zur Berechnung von $W(X)$ suchen. Diese werden sich auf Eigenschaften der erzeugenden Funktion aufbauen.

Für erzeugende Funktionen, die wie in (5) definiert sind, gilt, wie man sofort sieht,

$$[c_1 w_1 + c_2 w_2] = c_1[w_1] + c_2[w_2]$$

mit beliebigen Zahlen c_1, c_2. Ferner ist für $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$[\varphi_k] = [\varphi]^k,$$

was wegen $\Phi_0 = \varepsilon(x)$ auch noch für $k = 0$ richtig ist. Es wird daher

$$[w] = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} [\varphi]^k = e^{\lambda t([\varphi]-1)}. \tag{7}$$

§ 4. Die Momente.

Nachdem wir die Erzeugende ermittelt haben, können wir an die Lösung eines weiteren Problems gehen, nämlich an die Bestimmung

13) Zum Beispiel E. Jahnke und F. Emde, *Funktionentafeln*. Leipzig und Berlin 1938, S. 227.

14) A. a. O. 2b), S. 45.

des Mittelwertes und der Streuung. Für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(x)$ sind die durch $\int_{-\infty}^{\infty} x^n dW$ definierten Momente n-ter Ordnung, darunter vor allem die erster und zweiter Ordnung (Mittelwert und Streuung) von Interesse. Sie lassen sich nach einem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung oft benutzten Verfahren aus den Ableitungen der Erzeugenden finden (Ableitungen nach z bezeichnen wir durch Striche).

a) Der Mittelwert.

Durch Differentiation von (7) nach z erhalten wir

$$[w]'(z) = \int_0^{\infty} x z^{x-1} dW = e^{-\lambda t} \lambda t [\varphi]'(z) e^{\lambda t [\varphi](z)},$$

$$[w]'(1) = \int_0^{\infty} x dW = e^{-\lambda t} \lambda t [\varphi]'(1) e^{\lambda t [\varphi](1)}$$

$$= \lambda t [\varphi]'(1) = \lambda t \int_0^{\infty} x d\Phi,$$

da $[\varphi](1) = \int_0^{\infty} d\Phi = 1$ ist. Wir setzen

$$\lambda t \int_0^{\infty} x^n d\Phi(x) = \lambda t m_n = \Psi_n, \tag{8}$$

wo m_n das n-te Moment der Verteilung Φ ist. Damit bestimmt sich der Mittelwert zu

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x dW = \Psi_1 = \lambda t m_1. \tag{9}$$

m_1 ist also die mittlere Sprunghöhe.

b) Die Streuung.

Wir setzen

$$s_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dW,$$

$$s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 dW = s_0^2 - a^2.$$

Nach demselben Verfahren wie unter a) erhalten wir

$$[w]''(z) = \int_0^\infty x(x-1)\,z^{x-2}\,dW = e^{-\lambda t}\lambda t\,[\varphi]''(z)\,e^{\lambda t[\varphi](z)} + e^{-\lambda t}\{\lambda t\,[\varphi]'(z)\}^2 e^{\lambda t[\varphi](z)},$$

$$[w]''(1) = \int_0^\infty x(x-1)\,dW = e^{-\lambda t}\lambda t\,[\varphi]''(1)\,e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}\{\lambda t\,[\varphi]'(1)\}^2 e^{\lambda t} = \lambda t\int_0^\infty x(x-1)\,d\Phi + \left(\lambda t\int_0^\infty x\,d\Phi\right)^2,$$

$$s_0^2 - a = \Psi_2 - \Psi_1 + \Psi_1^2.$$

Es ist also

$$s^2 = s_0^2 - a^2 = \Psi_2. \tag{10}$$

§ 5. Ein Spezialfall der erweiterten Poissonschen Formel.

Als nächste Folgerung aus der Erzeugenden wollen wir die Formel (2) ableiten. Da sich diese als arithmetischer Sonderfall des erweiterten Poissonschen Gesetzes darstellen wird, wollen wir im folgenden die Überlegungen für arithmetische und geometrische Verteilungen Φ (und damit W) gesondert anstellen.

Wir setzen:

(11)

$\Phi_x = \sum_{\nu=0}^{x} \varphi_\nu$, bzw.	$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi$,
$W_x = \sum_{\nu=0}^{x} w_\nu$,	$W(x) = \int_0^x w(\xi)\,d\xi + e^{-\lambda t}$, [15]
$h_x = \lambda t\,\varphi_x$,	$h(x) = \lambda t\,\varphi(x)$,
$H_x = \sum_{\nu=0}^{x} h_\nu = \lambda t\,\Phi_x$,	$H(x) = \int_0^x h(\xi)\,d\xi = \lambda t\,\Phi(x)$,
$[\varphi](z) = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_x z^x$,	$[\varphi](z) = \int_0^\infty \varphi(x)\,z^x\,dx$,
$[h](z) = \sum_{x=0}^{\infty} h_x z^x = \lambda t\,[\varphi]$,	$[h](z) = \int_0^\infty h(x)\,z^x\,dx = \lambda t\,[\varphi]$,
$[w](z) = \sum_{x=0}^{\infty} w_x z^x$,	$[w](z) = \int_0^\infty w(x)\,z^x\,dx + e^{-\lambda t}$, [15]
$[W](z) = \sum_{x=0}^{\infty} W_x z^x = \frac{[w]}{1-z}$ für $\lvert z\rvert<1$.	$[W](z) = \int_0^\infty W(x)\,z^x\,dx = -\frac{[w]}{\ln z}$ für $\lvert z\rvert<1$.

15) Es ist nämlich $dW(x) = w(x)\,dx$ für $x > 0$ und $dW(0) = e^{-\lambda t}$.

Von den arithmetischen Verteilungen nehmen wir an, ihre Argumente seien äquidistant im Abstand 1; durch Koordinatentransformation können wir ja jede äquidistante Verteilung dahin überführen.

In diesem Falle ist

$$[w](z) = e^{-\lambda t} e^{\sum_\nu h_\nu z^\nu} = e^{-\lambda t} \prod_\nu e^{h_\nu z^\nu}$$

$$= e^{-\lambda t} \prod_\nu \left(1 + \frac{h_\nu z^\nu}{1!} + \frac{h_\nu^2 z^{2\nu}}{2!} + \cdots\right).$$

Der Koeffizient w_k von z^k setzt sich zusammen aus Gliedern der Form

$$e^{-\lambda t} \prod_\nu \frac{h_\nu^{\alpha_\nu}}{\nu!},$$

wo $$k = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots$$

ist. Wegen

$$\lambda t = \sum_\nu \lambda t \varphi_\nu = \sum_\nu h_\nu$$

ist $$w_k = e^{-h_1 - h_2 - h_3 - \cdots} \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots = k} \frac{h_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \frac{h_2^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \frac{h_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!} \cdots.$$

Damit haben wir die Formel (2), die von RIEBESELL[16]) bereits in die Mathematik der Sachversicherung eingeführt wurde, als einen diskontinuierlichen Spezialfall der erweiterten POISSONschen Formel abgeleitet.

Für die praktische Rechnung eignet sich diese Darstellung aber nicht; denn die dabei auszuführenden Summationen sind — besonders für große k — sehr umständlich. Aber als Sonderfall des allgemeinen Gesetzes, das wir untersuchen wollen, werden unsere Ergebnisse auch für (2) gelten, und schon der folgende § 6 wird eine andere, zur Rechnung wesentlich geeignetere Darstellung dieser Formel bringen.

§ 6. Eine Rekursionsformel zur praktischen Berechnung von w_x und W_x.

Wir wollen uns unserer Aufgabe, der Berechnung von w_x bzw. W_x, weiter widmen. Die üblichen Verfahren, aus der Erzeugenden Rückschlüsse auf die erzeugte Verteilung zu ziehen, können wir hier nicht gebrauchen; entweder sind die Ergebnisse viel zu ungenau (so z. B. die Abschätzungen durch die Momente) oder sie sind für die praktische Rechnung viel zu umständlich (so z. B. die LAPLACEsche Umkehrformel).

16) Vgl. 6).

Auf Grund der Eigenschaft unserer Erzeugenden, Exponentialfunktion einer bekannten Funktion zu sein, werden wir jetzt ein neues Verfahren ableiten, das eine brauchbare Rekursionsformel ergibt.

Zunächst betrachten wir den arithmetischen Fall. Nach (7) ist

$$[w](z) = \sum_{x=0}^{\infty} w_x z^x = e^{-\lambda t} e^{[h](z)},$$

woraus durch Differentiation nach z

$$\sum_{x=0}^{\infty} x\, w_x z^{x-1} = \left(\sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 h_{x_1} z^{x_1-1}\right)\left(\sum_{x_2=0}^{\infty} w_{x_2} z^{x_2}\right).$$

folgt. Ein Vergleich der Koeffizienten von z^{x-1} links und rechts liefert

$$x w_x = h_1 w_{x-1} + 2 h_2 w_{x-2} + 3 h_3 w_{x-3} + \cdots + x h_x w_0 \tag{12}$$

mit

$$w_0 = e^{-\lambda t}.$$

Damit haben wir eine Rekursionsformel für die w_x erhalten. Die Ausdrücke sind auf der Rechenmaschine leicht zu berechnen. Die umständlichen Summationen der Formel (2) sind dabei vermieden.

Ebenso können wir für W_x eine Rekursionsformel aufstellen. Es ist

$$[W](z) = [w](z)(1 + z + z^2 + \cdots) = w(z)\frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1,$$

wie man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigt.

Also folgt aus (7)

$$\begin{cases} [W] = \sum_{x=0}^{\infty} W_x z^x = \frac{e^{-\lambda t}}{1-z} e^{[h](z)}, \\ \frac{d[W]}{dz} = \frac{[W]}{1-z} + [W] \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 h_{x_1} z^{x_1-1}. \end{cases} \tag{13}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt hier

$$x W_x = \sum_{\nu=0}^{x} W_\nu + \sum_{\nu=0}^{x} \nu h_\nu W_{x-\nu}.$$

Setzen wir

$$1 + \nu h_\nu = i_\nu, \tag{14}$$

so erhalten wir

$$x W_x = i_1 W_{x-1} + i_2 W_{x-2} + \cdots + i_x W_0 \tag{15}$$

mit

$$W_0 = w_0 = e^{-\lambda t}$$

und haben so eine Rekursionsformel für W_x.

Ist die Anzahl der von Null verschiedenen h_ν endlich — in der Praxis wird das meist der Fall sein — so ist die Formel (12) zur Rechnung geeigneter; denn sie enthält weniger von Null verschiedene Glieder.

Beispiel: Um den praktischen Wert unserer Untersuchungen zu erproben und um das von KHINTCHINE und BOEHM angegebene Verfahren (3) mit unserer Formel (12) vergleichen zu können, führen wir die Rechnung für ein Beispiel durch.

Wir denken uns eine Gesellschaft:

Die Schadenhöhen x und die entsprechenden Schadenwahrscheinlichkeiten φ_x seien

$$\begin{array}{llll} x = 1 & 2 & 3 & 4 \\ \varphi_x = 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1. \end{array}$$

Ferner sei $\lambda t = 2$. Die ersten w_x sollen berechnet werden. Wir schreiben noch φ_{kx} für die Sprunghöhen der in § 1 definierten Treppenkurven Φ_k.

I. Das Verfahren von KHINTCHINE und BOEHM.

Für die Verteilungen φ_{kx} erhalten wir folgendes Schema ($k, x = 0, 1, \ldots, 6$):

$k \mid x$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0,5	0,3	0,1	0,1	0	0
2	0	0	0,25	0,30	0,19	0,16	0,07
3	0	0	0	0,125	0,225	0,210	0,192
4	0	0	0	0	0,0625	0,1500	0,1850
5	0	0	0	0	0	0,03125	0,09375
6	0	0	0	0	0	0	0,015625

Nach (3) ist $w_x = e^{-2} \sum_{k=0}^{x} \frac{2^k}{k!} \varphi_{kx}$. Das ergibt

$$w_0 = e^{-2},$$

$$w_1 = e^{-2}\left(\frac{2}{1!}\,0{,}5\right),$$

$$w_2 = e^{-2}\left(\frac{2}{1!}\,0{,}3 + \frac{2^2}{2!}\,0{,}25\right),$$

$$w_3 = e^{-2}\left(\frac{2}{1!}\,0{,}1 + \frac{2^2}{2!}\,0{,}30 + \frac{2^3}{3!}\,0{,}125\right),$$

$$w_4 = e^{-2}\left(\frac{2}{1!}\,0{,}1 + \frac{2^2}{2!}\,0{,}19 + \frac{2^3}{3!}\,0{,}225 + \frac{2^4}{4!}\,0{,}0625\right),$$

$$w_5 = e^{-2}\left(\quad 0{,}16 + \frac{2^3}{3!}\,0{,}210 + \frac{2^4}{4!}\,0{,}1500 + \frac{2^5}{5!}\,0{,}03125\right),$$

$$w_6 = e^{-2}\left(\quad 0{,}07 + \frac{2^3}{3!}\,0{,}192 + \frac{2^4}{4!}\,0{,}1850 + \frac{2^5}{5!}\,0{,}09375 + \frac{2^6}{6!}\,0{,}015625\right.$$

also

$$w_0 = e^{-2},$$
$$w_1 = e^{-2},$$
$$w_2 = 1{,}1\, e^{-2},$$
$$w_3 = 0{,}9667\, e^{-2},$$
$$w_4 = 0{,}921\,667\, e^{-2}.$$

II. Die Formel (2) liefert eine noch umständlichere Rechnung, sie sei hier nicht durchgeführt.

III. Die Rechnung nach der hier entwickelten Rekursionsformel: Es ist $h_x = \lambda t \varphi_x$, also

$$h_1 = 1;\ 2h_2 = 1{,}2;\ 3h_3 = 0{,}6;\ 4h_4 = 0{,}8$$

und damit nach (12)

$$w_k = \frac{1}{k}\left(w_{k-1} + 1{,}2\, w_{k-2} + 0{,}6\, w_{k-3} + 0{,}8\, w_{k-4}\right).$$

Das ergibt

$$w_0 = e^{-2},$$
$$w_1 = \frac{1}{1} e^{-2} = e^{-2},$$
$$w_2 = \frac{1}{2}(1 + 1{,}2)\, e^{-2} = 1{,}1\, e^{-2},$$
$$w_3 = \frac{1}{3}(1 \cdot 1{,}1 + 1{,}2 + 0{,}6)\, e^{-2} = 0{,}9667\, e^{-2},$$
$$w_4 = \frac{1}{4}(1 \cdot 0{,}9667 + 1{,}2 \cdot 1{,}1 + 0{,}6 + 0{,}8)\, e^{-2} = 0{,}921667\, e^{-2}.$$

Die Durchführung der Rechnungen zeigt, daß die Formel (12) eine wesentliche Vereinfachung der Formel (3) bringt. Sind m Schadenhöhen möglich, d. h. ist die Anzahl der von Null verschiedenen h_ν gleich m, und soll w_x ermittelt werden, so ist bei (3) die Anzahl der zu bildenden und zu summierenden Produkte von der Größenordnung $\frac{1}{2} m x^2$, bei der Formel (12) aber nur von der Ordnung $m x$.

Ebenso wie (12) läßt sich die Rekursionsformel für beliebige Verteilungen $W(x)$ ableiten. Differentiation der Gleichung (7) nach z ergibt

$$\int_0^\infty x\, z^{x-1}\, dW(x) = \int_0^\infty x\, z^{x-1}\, dH(x) \int_0^\infty z^x\, dW(x)$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1\, z^{x_1 + x_2 - 1}\, dH(x_1)\, dW(x_2).$$

Der Koeffizientenvergleich von z^{x-1} liefert

$$x\,dW(x) = \int_{\xi=0}^{x} \xi\,dH(\xi)\,dW(x-\xi)\,. \tag{12'}$$

Ist $H(x)$ differenzierbar, so ist $dW(x) = w(x)\,dx$ für $x > 0$ und $dW(0) = e^{-\lambda t}$, und (12') wird dann

$$x\,w(x) = \int_{0}^{x} \xi\,h(\xi)\,w(x-\xi)\,d\xi + x\,h(x)\,e^{-\lambda t}.$$

Ferner ist im stetigen Falle für $|z| < 1$

$$[W] = \int_{0}^{\infty} W(x)\,z^x\,dx = [w]\int_{0}^{\infty} z^x\,dx = -\frac{[w]}{\ln z},$$

wie man durch Koeffizientenvergleich leicht feststellt. Eine zum unstetigen Fall analoge Überlegung zeigt, daß

$$\frac{d[W]}{dz} = [W]'(z)\left(\int_{0}^{\infty} z^{x-1}\,dx + \int_{0}^{\infty} x\,h(x)\,z^{x-1}\,dx\right)$$

gilt oder daß

$$\int_{0}^{\infty} x\,W(x)\,z^{x-1}\,dx = [W](z)\int_{0}^{\infty} i(x)\,z^{x-1}\,dx$$

mit

$$i(x) = 1 + x\,h(x)$$

ist. Der Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel für stetige Verteilungen:

$$x\,W(x) = \int_{0}^{x} i(\xi)\,W(x-\xi)\,d\xi\,. \tag{15'}$$

Die Rekursionsformeln (12') und (15') haben die Form von VOLTERRAschen Integralgleichungen; denn statt (12') können wir

$$x\,w(x) = \int_{0}^{x} (x-\xi)\,h(x-\xi)\,w(\xi)\,d\xi + e^{-\lambda t}\,x\,h(x)$$

schreiben. Setzen wir für $x > 0$

$$\frac{(x-\xi)\,h(x-\xi)}{x} = K(x,\xi)\,,$$

so wird

$$w(x) - \int_{0}^{x} K(x,\xi)\,w(\xi)\,d\xi = e^{-\lambda t}\,h(x)\,. \tag{16}$$

Ebenso schreiben wir statt (13′)

$$x\,W(x) = \int_0^x i(x-\xi)\,W(\xi)\,d\xi$$

und setzen

$$\frac{i(x-\xi)}{x} = K^*(x,\xi).$$

Dann erhalten wir für $W(x)$ die Integralgleichung

$$W(x) - \int_0^x K^*(x,\xi)\,W(\xi)\,d\xi = 0. \tag{16′}$$

Die Darstellungen (16) und (16′) haben den Vorteil, daß man für die Untersuchung von $w(x)$ und $W(x)$ die Theorie der Integralgleichungen heranziehen kann.

§ 7. Verwendung der Brunsschen Reihe zur praktischen Berechnung von W_x.

Solange λt klein ist, interessieren w_x und W_x auch nur für kleine x; denn der Mittelwert von w_x ist dann klein, und in diesem Falle lassen sich die Wahrscheinlichkeiten gut nach § 6 berechnen. Für große λt aber sind w_x und W_x gerade für große x von Bedeutung, und dann sind die Verfahren des vorigen Paragraphen viel zu langwierig.

Wir werden daher W_x in eine Reihe entwickeln; da wir dabei die Momente von W_x und deren Eigenschaften benötigen werden, wollen wir zunächst diese untersuchen.

a) Die Rekursionsformel der Momente.

Es sei μ_n das n-te Moment von $W(x)$ in bezug auf den Nullpunkt, M_n das n-te Moment von $W(x)$ in bezug auf den Mittelwert.

Aus der Rekursionsformel (12′) erhalten wir durch Multiplikation mit x^n und Integration

$$\mu_{n+1} = \int_0^\infty \left(\xi\,dH(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} x^n\,dW(x-\xi) \right). \tag{17}$$

Das zweite Integral in (17) läßt sich umformen in

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(x-\xi)+\xi]^n\,dW(x-\xi) = \mu_n + \binom{n}{1}\xi\,\mu_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\xi^n\mu_0. \tag{18}$$

Setzen wir dies in (17) ein und schreiben wir entsprechend zu (8)

$$\int_0^\infty \xi^\nu\,dH(\xi) = \lambda t \int_0^\infty \xi^\nu\,d\Phi(\xi) = \Psi_\nu,$$

so erhalten wir als Rekursionsformel für die Momente von $W(x)$

$$\mu_{n+1} = \Psi_1 \mu_n + \binom{n}{1} \Psi_2 \mu_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} \Psi_{n+1} \mu_0 . \tag{19}$$

b) Angleichung von $W(x)$ an die GAUSSsche Verteilung.

Im Hinblick auf die angestrebte Reihenentwicklung von $W(x)$ ist es notwendig, diese Verteilung durch lineare Transformation mit Mittelwert und Streuung an die GAUSSsche Verteilung[17])

$$\Phi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} du$$

anzugleichen. Ersetzen wir die Veränderliche x durch

$$y = c_1 x + c_0 , \tag{20}$$

so geht $W(x)$ über in die Verteilung $V(y)$. Dann muß sein:

$$\frac{c_0}{c_1} = -\mu_1 = -\Psi_1 ,$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2(\mu_2 - \mu_1^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\Psi_2}} .$$

Ist λt groß, so ist $c_1 \ll 1$.

Die Momente von $V(y)$ bezeichnen wir mit $\bar{\mu}_\nu$. Es ist

$$\bar{\mu}_1 = 0 , \quad \bar{\mu}_2 = \frac{1}{2}$$

wie bei der GAUSSschen Verteilung. Wir brauchen aber auch die höheren Momente und wollen daher für die $\bar{\mu}_\nu$ eine ähnliche Rekursionsformel wie (19) ableiten.

Wir gehen wieder von (12') aus, multiplizieren aber diesmal mit $(x - \mu_1)^n$ und erhalten

$$x (x - \mu_1)^n dW = \int_{\xi=0}^{\infty} \xi \, dH(\xi) \, (x - \mu_1)^n \, dW(x - \xi) .$$

Führen wir als Hilfsgröße den Ausdruck

$$M^*_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} x (x - \mu_1)^n \, dW(x)$$

ein, so ist

$$M^*_{n+1} = \int_{\xi=0}^{\infty} \left(\xi \, dH(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_1)^n \, dW(x - \xi) \right) ,$$

17) Um Verwechslungen mit der Verteilungsfunktion Φ bzw. φ zu vermeiden, bezeichnen wir die Gaußsche Verteilung durch Φ_G bzw. φ_G.

worin das zweite Integral auch in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty}[(x-\xi-\mu_1)+\xi]^n\,dW(x-\xi)$$

$$=\frac{1}{{c_1}^n}\bar{\mu}_n+\binom{n}{1}\frac{\xi}{{c_1}^{n-1}}\bar{\mu}_{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{\xi^n}{{c_1}^0}\bar{\mu}_0$$

geschrieben werden kann. Dann wird

$$M^*_{n+1}=\bar{\mu}_n\frac{\Psi_1}{{c_1}^n}+\binom{n}{1}\bar{\mu}_{n-1}\frac{\Psi_2}{{c_1}^{n-1}}+\cdots+\binom{n}{n}\mu_0\frac{\Psi_{n+1}}{{c_1}^0}. \tag{21}$$

Andererseits ist

$$M^*_{n+1}=\int_{-\infty}^{\infty}x\,(x-\mu_1)^n\,dW(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,(x-\mu_1)\,dV(y),$$

so daß sich

$$M^*_{n+1}=\frac{1}{{c_1}^{n+1}}\bar{\mu}_{n+1}+\frac{\mu_1}{{c_1}^n}\bar{\mu}_n \tag{22}$$

ergibt. Setzen wir die Ausdrücke (21) und (22) gleich und beachten, daß $\mu_1=\Psi_1$ und ${c_1}^2=\frac{1}{2\Psi_2}$ ist, so erhalten wir die gesuchte Rekursionsformel für die Momente $\bar{\mu}_\nu$:

$$\bar{\mu}_{n+1}=\binom{n}{1}{c_1}^2\Psi_2\bar{\mu}_{n-1}+\binom{n}{2}{c_1}^3\Psi_3\bar{\mu}_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}{c_1}^{n+1}\Psi_{n+1}\bar{\mu}_0 \tag{23}$$

$$=\frac{n}{2}\bar{\mu}_{n-1}+\binom{n}{2}{c_1}^3\Psi_3\bar{\mu}_{n-2}+\cdots+{c_1}^{n+1}\Psi_{n+1}.$$

Aus (23) können wir nun leicht eine sehr bedeutsame Folgerung ziehen: Wir betrachten die Momente $\bar{\mu}_\nu$ als Abhängige der mittleren Sprunghäufigkeit λt. Es ist nach (8)

$$\Psi_\nu=\lambda t\,m_\nu,$$

wo m_ν das ν-te Moment der Verteilung Φ ist. Beachten wir dies und dazu noch

$${c_1}=\frac{(2m_2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda t}},$$

so wird aus (23)

$$\bar{\mu}_{n+1}=\frac{n}{2}\bar{\mu}_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\binom{n}{2}(2m_2)^{-\frac{3}{2}}m_3\bar{\mu}_{n-2} \tag{23'}$$

$$+\frac{1}{\lambda t}\binom{n}{3}(2m_2)^{-2}m_4\,\mu_{n-3}+\cdots.$$

Setzen wir voraus, daß die m_ν endlich sind, so erhalten wir

$$\lim_{\lambda t\to\infty}\bar{\mu}_{2\nu}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2^\nu},\qquad\lim_{\lambda t\to\infty}\bar{\mu}_{2\nu+1}=0,$$

also gerade die Momente der Gaussschen Verteilung.

Nach dem Stetigkeitssatz des Momentenproblems konvergiert daher $V(y)$ gegen diese, d. h. es ist

$$\lim_{\lambda t \to \infty} V(y) = \Phi_G(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-u^2} du. \tag{24}$$

Praktisch ist uns aber nicht viel geholfen; denn die mittlere Schadenanzahl λt wird in allen Anwendungen stets endlich sein, $V(y)$ wird daher von der GAUSSschen Verteilung abweichen.

Gerade dieser Umstand bedingt ja die unterschiedliche Auffassung der „modernen" Risikotheorie in der Versicherungsmathematik (wie sie z. B. LUNDBERG, CRAMÉR vertreten) gegenüber der „klassischen" (so z. B. LANDRÉ, BOHLMANN u. a.).[18])

Wir müssen daher nach Wegen suchen, $V(y)$ mit anderen Hilfsmitteln als durch Heranziehen der GAUSSschen Verteilung numerisch zu berechnen, zugleich wollen wir aber auch die Berechtigung der Verwendung der letzteren, d. h. die Abweichung von $V(y)$ gegen die Normalverteilung, untersuchen. Die Reihenentwicklung wird die Mittel dazu geben.

c) Die BRUNSsche Reihe.

Nach diesen Vorbereitungen können wir an die vorgenommene Reihenentwicklung unserer verallgemeinerten POISSONschen Verteilung gehen. Ein in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibenden Statistik oft angewandtes Verfahren, aus der Kenntnis der Momente einer Verteilung $V(y)$ eine Näherungsreihe für diese zu erhalten, ist die Benutzung der sogenannten BRUNSschen Reihe. Es wird

$$V(y) = a_0 \Phi_G(y) + a_1 \varphi_G(y) + a_2 \varphi_G'(y) + \cdots. \tag{25}$$

Dabei ist

$$\varphi_G(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2},$$

$$\varphi_G^{(\nu)}(y) = \varphi_G(y)\, p_\nu(y)$$

mit

$$p_\nu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \frac{(-1)^{\nu-\varkappa} 2^{\nu-2\varkappa} \nu!}{\varkappa!\,(\nu-2\varkappa)!} y^{\nu-2\varkappa}.$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G^{(\nu)}(y)\, p_\varkappa(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \varkappa, \\ 2^\varkappa \varkappa! & \text{für } \nu = \varkappa, \end{cases}$$

18) Vgl. H. Cramér, *Das Gesetz von Gauß und die Theorie des Risikos.* Skandinavisk Aktuarietidskrift 6 (1923), S. 209—237.

woraus sich $$a_\nu = \frac{1}{2^\nu \nu!} \int_{-\infty}^{\infty} p_\nu(y)\, dV(y),$$

also

$$a_\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} \frac{(-1)^{\nu-\varkappa}}{4^\varkappa \varkappa!\,(\nu-2\varkappa)!}\, \bar{\mu}_{\nu-2\varkappa} \tag{26}$$

ergibt. Bei der Angleichung von Mittelwert und Streuung an die Gausssche Verteilung wird

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Nach der Rekursionsformel erhalten wir folgende Tafel der $\bar{\mu}_\nu$:

$$\begin{cases} \bar{\mu}_0 = 1, & \mu_1 = 0, & \bar{\mu}_2 = \frac{1}{2}, \\ \mu_3 = c_1^3 \Psi_3, & \mu_4 = \frac{3}{4} + c_1^4 \Psi_4, & \mu_5 = 5\, c_1^3 \Psi_3 + c_1^5 \Psi_5, \\ \mu_6 = \frac{15}{8} + \frac{15}{2} c_1^4 \Psi_4 + 10\, c_1^6 \Psi_3^2 + c_1^6 \Psi_6, & & \\ \mu_7 = \frac{105}{4} c_1^3 \Psi_3 + \frac{21}{2} c_1^5 \Psi_5 + 35\, c_1^7 \Psi_3 \Psi_4 + c_1^7 \Psi_7, & & \\ \bar{\mu}_8 = \frac{105}{16} + \frac{105}{2} c_1^4 \Psi_4 + 140\, c_1^6 \Psi_3^2 + 14\, c_1^6 \Psi_6 + 56\, c_1^8 \Psi_3 \Psi_5 & & \\ \qquad + 35\, c_1^8 \Psi_4^2 + c_1^8 \Psi_8. & & \end{cases} \tag{27}$$

Nach (26) erhalten wir unter Berücksichtigung von $\mu_1 = 0$, $\bar{\mu}_2 = \frac{1}{2}$ für die ersten Koeffizienten der Brunsschen Reihe

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, \\ a_3 = -\frac{1}{6} c_1^3 \Psi_3, & a_4 = +\frac{1}{24} c_1^4 \Psi_4, & a_5 = -\frac{1}{120} c_1^5 \Psi_5, \\ a_6 = +\frac{1}{72} c_1^6 \Psi_3^2 + \frac{1}{720} c_1^6 \Psi_6, & & \\ a_7 = -\frac{1}{144} c_1^7 \Psi_3 \Psi_4 - \frac{1}{5040} c_1^7 \Psi_7, & & \\ a_8 = +\frac{1}{720} c_1^8 \Psi_3 \Psi_5 + \frac{1}{1152} c_1^8 \Psi_4^2 + \frac{1}{40320} c_1^8 \Psi_8. & & \end{cases} \tag{28}$$

d) Die Abnahme der Brunsschen Koeffizienten und die Rekursionsformel für die a_ν.

Wir werden nun zeigen, daß — wie es schon (28) vermuten läßt — alle Koeffizienten die Form

$$a_\nu = c_1^\nu A_\nu(\Psi_3, \ldots, \Psi_\nu) \tag{29}$$

haben. Da die $\bar{\mu}_\nu$ und die a_ν aus der Rekursionsformel ganz formal berechnet werden – von der Tatsache, daß sie wahrscheinlichkeitstheoretische Größen sind, haben wir ja keinen Gebrauch gemacht — so müssen alle erhaltenen Werte für alle c_1 gelten, d. h. wir können c_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren lassen. Dabei ist $\bar{\mu}_\nu = \bar{\mu}_\nu(c_1)$, und $\Psi_3, \Psi_4, \ldots$ sind fest. Zum Beweise bemerken wir: Es ist

$$\bar{\mu}_n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu}\, a_\nu, \tag{30}$$

wo

$$\alpha_{n\nu} = (-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!}\, \mu_{G,\, n-\nu}$$

gesetzt ist und $\mu_{G,\varkappa}$ das $\varkappa$-te Moment der GAUSSschen Verteilung bedeutet. Um dies einzusehen, nehmen wir zuerst an, die BRUNSsche Reihe (25) konvergiere gleichmäßig. Dann existiert

$$v(y) = \frac{dV}{dy},$$

und es ist

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} v(y)\, y^n\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, \varphi_G^{(\nu)}(y)\, y^n\, dy = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G^{(\nu)}(y)\, y^n\, dy.$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_G^{(\nu)}(y)\, y^n\, dy = \begin{cases} (-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!}\, \mu_{G,\,n-\nu} & \text{für } \nu \leqq n, \\ 0 & \text{für } \nu > n. \end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung. Die Auflösung der Gleichungen (26) nach den $\bar{\mu}$ muß aber dasselbe Ergebnis (30) liefern. (30) muß daher auch für den Fall gelten, daß die BRUNSsche Reihe nicht gleichmäßig konvergiert.

Da es hier schwierig ist, von Rekursionsformeln auf explizite Ausdrücke zu gelangen, führen wir den Beweis von (29) induktiv. (29) sei schon bewiesen für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Dann ist wegen (30)

(29a) $$\bar{\mu}_n(c_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ni}\, c_1^i A_i + \alpha_{nn}\, a_n(c_1)$$

mit $$\alpha_{nn} = (-1)^n\, n! \neq 0.$$

Aus (29a) und (29) ergibt sich

(29b) $$\left(\frac{d^\nu}{dc_1^\nu}\right)_{c_1=0} \bar{\mu}_n = \nu!\, \alpha_{n\nu} A_\nu \qquad \text{für alle } \nu.$$

Umgekehrt folgt aus (29b) auch (29); denn wegen

$$\bar{\mu}_n^{(\nu)}(0) = \nu!\, \alpha_{n\nu} A_\nu + \alpha_{nn}\, a_n^{(\nu)}(0)$$

besagt (29b) $$\alpha_{nn}\, a_n^{(\nu)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < n, \\ n!\, \alpha_{nn} A_n & \text{für } \nu = n. \end{cases}$$

Da aber a_n ein Polynom in c_1 von höchstens n-tem Grade ist, folgt somit auch aus (29b), daß a_n die Form $c_1^n A_n$ mit $A_n = \text{const}$ hat; es genügt also, (29b) zu beweisen.

Wir setzen

$$\left(\frac{d^\nu}{dc_1^\nu}\right)_{c_1=0} \bar{\mu}_n = \nu!\, \alpha_{n\nu} A_\nu + \varepsilon(n, \nu)$$

an. Es ist somit zu beweisen, daß

(29c) $$\varepsilon(n, \nu) = 0$$

für alle $\nu \leqq n$ (für $\nu > n$ ist die Behauptung trivial) gilt unter der Annahme

$$\varepsilon(n-1, \nu) = \varepsilon(n-2, \nu) = \cdots = 0.$$

Es ist nach (23)

$$\bar{\mu}_n = \frac{n-1}{2}\mu_{n-2} + \sum_{\iota=3}^{n} \binom{n-1}{\iota-1} c_1^{\iota} \Psi_\iota \bar{\mu}_{n-\iota}.$$

Differenzieren wir ν mal und berücksichtigen dabei, daß

$$\left(\frac{d^\nu}{d x^\nu}\right)_{x=0} x^\iota f(x) = \frac{\nu!}{(\nu-\iota)!} f^{(\nu-\iota)}(0)$$

ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{d^\nu}{d c_1^\nu}\right)_{c_1=0} \bar{\mu}_n = \frac{n-1}{2}\left(\frac{d^\nu}{d c_1^\nu}\right)_{c_1=0} \bar{\mu}_{n-2} + \sum_{\iota=3}^{\nu} \binom{n-1}{\iota-1} \Psi_\iota \frac{\nu!}{(\nu-\iota)!} \bar{\mu}_{n-\iota}^{(\nu-\iota)}(0).$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$\left(\frac{d^\nu}{d c_1^\nu}\right)_{c_1=0} \bar{\mu}_{n-2} = \begin{cases} \nu!\, \alpha_{n-2,\nu} A_\nu & \text{für } \nu \leqq n-2, \\ 0 & \text{für } \nu > n-2, \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_{n-\iota}^{(\nu-\iota)}(0) = (\nu-\iota)!\, \alpha_{n-\iota,\nu-\iota} A_{\nu-\iota},$$

damit wird

$$(31)\quad \alpha_{n\nu} A_\nu + \frac{\varepsilon(n,\nu)}{\nu!} = \frac{n-1}{2}\alpha_{n-2,\nu} A_\nu + \sum_{\iota=3}^{\nu} \binom{n-1}{\iota-1} \Psi_\iota \alpha_{n-\iota,\nu-\iota} A_{\nu-\iota}.$$

Nun ist nach (30)

$$\alpha_{n,\nu} = (-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!} \mu_{G,n-\nu},$$

$$\alpha_{n-\iota,\nu-\iota} = (-1)^{\nu-\iota} \frac{(n-\iota)!}{(n-\nu)!} \mu_{G,n-\nu}$$

und für $\nu \leqq n-2$

$$\alpha_{n-2,\nu} = (-1)^\nu \frac{(n-2)!}{(n-\nu-2)!} \mu_{G,n-\nu-2} = \alpha_{n\nu} \frac{2(n-\nu)}{n(n-1)}.$$

Ist $n-\nu$ ungerade, so ist trivial, daß $\varepsilon(n,\nu) = 0$ wird; denn in allen anderen Gliedern von (31) steht $\alpha_{n\nu}$, und das ist 0, da es $\mu_{G,n-\nu} = 0$ als Faktor enthält.

Ist $n-\nu$ gerade, dann ist nach (31)

$$(-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!} \mu_{G,n-\nu} A_\nu + \frac{\varepsilon(n,\nu)}{\nu!} = \frac{n-1}{2}(-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!} \mu_{G,n-\nu} \frac{2(n-\nu)}{n(n-1)} A_\nu$$

$$+ \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{(n-1)!}{(n-\iota)!\,(\iota-1)!} \Psi_\iota (-1)^{\nu-\iota} \frac{(n-\iota)!}{(n-\nu)!} \mu_{G,n-\nu} A_{\nu-\iota}$$

oder

$$n A_\nu + \eta(n,\nu) = (n-\nu) A_\nu + \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{(-1)^\iota}{(\iota-1)!} \Psi_\iota A_{\nu-\iota},$$

wo

$$\eta(n,\nu) = \frac{(-1)^\nu (n-\nu)!}{\nu!\, \mu_{G,n-\nu} (n-1)!} \varepsilon(n,\nu)$$

bedeutet. Die Gleichung bleibt für $n - \nu = 0$ bestehen, da dann der erste Summand der rechten Seite verschwindet. Es gilt demnach

$$\nu A_\nu + \eta(n, \nu) = \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{(-1)^\iota}{(\iota-1)!} \Psi_\iota A_{\nu-\iota}.$$

Da νA_ν und die rechte Seite von n unabhängig sind, muß auch $\eta(n, \nu)$ von n unabhängig sein. Also ist $\eta(n, \nu) = \eta(n-1, \nu) = 0$ für alle ν, also auch $\varepsilon(n, \nu) = 0$. Damit ist (29c) bewiesen, und es gilt wirklich Gleichung (29).

Zugleich folgt für die A_ν die wichtige Rekursionsformel

$$\nu A_\nu = \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{(-1)^\iota}{(\iota-1)!} \Psi_\iota A_{\nu-\iota} \tag{32}$$

oder

$$\nu a_\nu = \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{(-c_1)^\iota}{(\iota-1)!} \Psi_\iota a_{\nu-\iota}. \tag{32'}$$

Aus (32) und (32') ergibt sich, daß die höchste Anzahl der Ψ_ν, die in einem Summanden von A_n oder a_n auftritt, gleich $\left[\frac{n}{3}\right]$ ist.

Berücksichtigt man, daß alle Ψ_ν in bezug auf λt von der Ordnung λt sind und daß c_1 von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$ ist, so erhält man

$$\text{Ordnung von } a_n = (\lambda t)^{\left[\frac{n}{3}\right] - \frac{n}{2}}. \tag{33}$$

e) Kritik.

Soll eine BRUNSsche Reihe praktisch brauchbar sein, so muß sie drei Bedingungen genügen:

1. Die Koeffizienten müssen leicht zu bestimmen sein.

2. Die Reihe muß schnell konvergieren.

3. Der Fehler, der durch Berücksichtigung nur endlich vieler Glieder entsteht, muß abschätzbar sein.

Die Bedingung 1. ist durch die Rekursionsformel (32') der a_ν erfüllt.

Die Ψ_ν als Momente einer vorgegebenen Verteilung sind leicht auszurechnen, die a_ν erhält man mühelos unter Umgehung der μ_ν aus der Rekursionsformel (32').

Die Bedingung 2. ist wegen (33) ebenfalls gut erfüllt, falls λt nicht klein ist.

Die Bedingung 3. ist insofern erfüllt, als man nach (33) angeben kann, von welcher Ordnung in bezug auf λt der vernachlässigte Rest ist.

§ 8. Zusammenfassung.

Erfährt eine Veränderliche zu zufälligen Zeitpunkten Sprünge, deren mittlere Anzahl in der Zeiteinheit λ sei und deren Höhe einer Verteilung $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{x} \varphi_\nu$ unterliegt, so wird die Gesamtänderung X der Veränderlichen im Zeitabschnitt der Länge t durch die Verteilung

$$W(X) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Phi_k(X)$$

bestimmt, wo $\quad \Phi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k-1}(x-\xi)\, d\Phi(\xi)$

ist. Für den Fall, daß

$$\lambda t \frac{d\Phi}{dx} = a e^{-bx}$$

ist, ist $\quad \frac{dW}{dX} = w(X) = e^{-\lambda t} a e^{-bX} \frac{J_1(2i\sqrt{aX})}{i\sqrt{aX}}.$

Ist Φ eine beliebige Verteilung, so läßt sich $W(X)$ durch die Rekursionsformeln

$$X w(X) = \int_0^X \xi h(\xi) w(X-\xi)\, d\xi + X h(X) e^{-\lambda t} \text{ bzw. } \sum_{\nu=1}^{X} \nu h_\nu w_{X-\nu}$$

und

$$X W(X) = \int_0^X i(\xi) W(X-\xi)\, d\xi \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{\nu=1}^{X} i_\nu W_{X-\nu}$$

berechnen, wobei

$$h_x = \lambda t\, \varphi_x \qquad \text{und} \qquad i_x = 1 + x h_x$$

ist. Andererseits ist $W(X)$ durch die Bruns sche Reihe

$$W(X) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \Phi_G^{(\nu)}\left(\frac{X-\Psi_1}{\sqrt{2\Psi_2}}\right)$$

darstellbar, wobei

$$\Psi_\nu = \lambda t \int_0^\infty \xi^\nu d\Phi(\xi) \qquad \text{und} \qquad \Phi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

ist und die Koeffizienten a_ν der Rekursionsformel

$$\nu a_\nu = \sum_{\iota=3}^{\nu} \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2\Psi_2}}\right)^\iota}{(\iota-1)!} \Psi_\iota a_{\nu-\iota}$$

genügen. Die BRUNSsche Reihe konvergiert um so rascher, je größer λt ist, für $\lambda t \to \infty$ strebt $W(X) \to \Phi_G\left(\frac{X-\Psi_1}{\sqrt{2\Psi_2}}\right)$.

Zweiter Teil.

Versicherungstechnische Anwendung.

§ 1. Die Nettoprämie.

Wir stellen als Aufgabe des zweiten Teiles dieser Arbeit, die mathematische Theorie der Sachversicherung auf das erweiterte POISSONsche Gesetz aufzubauen; d. h. wir wollen die Versicherungswerte mit Hilfe dieses Gesetzes bestimmen.

Als erstes wollen wir die Formel für die Nettoprämie gewinnen: Als Nettoprämie P definiert man bekanntlich den Betrag, der von dem Versicherten aufgebracht werden muß, um die erwartungsmäßige Auszahlung zu decken. Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese $\leqq x$ ist, durch $W(x)$ gegeben, so wird die erwartungsmäßige Auszahlung durch das Integral $\int_0^\infty x\,dW$, d. h. durch den Mittelwert von $W(x)$ gegeben. Die in (9) auftretende Größe a ist also die Nettoprämie; λ bedeutet dabei die auf die Zeiteinheit entfallende mittlere Schadenanzahl, Φ die Verteilung der Schadenhöhen. (9) ergibt dann, daß die Nettoprämie das Produkt aus der mittleren Schadenanzahl λ, der mittleren Schadenhöhe m_1 und der Versicherungsdauer t ist.

Dieses Ergebnis ist hier nur des systematischen Aufbaues wegen abgeleitet; denn es ist längst bekannt und auch ohne Rechnung unmittelbar einzusehen. Würde die Kenntnis der Nettoprämie zur Behandlung der versicherungstechnischen Probleme ausreichen, so wäre der mathematische Aufwand, der zur Untersuchung von $W(x)$ gemacht wurde, überflüssig. Bekanntlich kann aber eine Gesellschaft von den Nettoprämien allein nicht bestehen, auch wenn wir von den Verwaltungskosten, die ja durch besondere Zuschläge gedeckt werden, absehen. Sie könnte ja ihren Verpflichtungen nicht nachkommen, sowie die Schäden den Mittelwert übersteigen. Es ist daher noch

nötig, Sicherheitsmittel zurückzustellen und Risikozuschläge zu den Nettoprämien zu erheben. Diese ausreichend zu bestimmen, ist Aufgabe der Risikotheorie; die folgenden Paragraphen sollen Verfahren dazu geben.

§ 2. Grundsätzliche Bemerkungen zur Risikotheorie.

In der Praxis verfährt man bei der Berechnung des Risikozuschlages folgendermaßen:

Sei Q_ν der Gesamtschaden der Gesellschaft im ν-ten Jahre ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) ihres Bestehens, S_ν ihre Gesamtversicherungssumme in diesem Jahre, dann ist $q_\nu = \frac{Q_\nu}{S_\nu}$ die relative Schadenquote des Jahres. Wir bilden die Folge $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und können so die relativen Häufigkeiten der einzelnen q_ν feststellen, die für uns mit den Wahrscheinlichkeiten identisch sind. So erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Schadenquote zu erreichen, bzw. durch Summation die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Quote nicht überschritten wird.

Die relativen Häufigkeiten als Funktion von q_ν dargestellt, ergeben eine Kurve, die bei *Versicherungen mit unabhängigen Schadenereignissen* durch eine Gausssche Verteilung ausgeglichen wird. Wir haben aber im ersten Teil gezeigt, daß die Kurve der theoretischen Wahrscheinlichkeiten bei einem endlich großen Versicherungsbestande gar keine Gausssche ist, sondern daß ihr Integral an den in Frage kommenden Stellen sogar erheblich von dem der Gausssschen Verteilung abweichen kann. Wie hoch sich diese Abweichung zahlenmäßig auf die Versicherungswerte auswirkt, werden die Beispiele in § 6 zeigen.

Bei den *abhängigen Schadenereignissen*, z. B. in der Feuerversicherung, erhält man Kurven mit einem stark nach rechts ausladenden Ast. Diese gleicht man — ebenfalls unter der unrichtigen Annahme eines unendlich großen Versicherungsbestandes (diese Annahme steckt im Grenzübergang von der Formel des Urnenschemas zur Pearsonschen Differentialgleichung) — unter Hypothesen über die Schadenansteckung nach den sogenannten Pearsonschen Kurven aus. Wir werden aber zeigen (§ 3), daß auch diese Kurven sich durch allgemeine Poissonsche Verteilungen (3) darstellen lassen.

Abgesehen von dem eben Bemängelten weist das Verfahren noch andere Unzulänglichkeiten auf: In jeder Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird die Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit ersetzt. Das Bayessche Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt uns, daß diese Annahme bei genügend großer Beobach-

tungsserie einigermaßen berechtigt ist. Aber in diesem Falle, wo die beobachtete Serie der q_ν nur soviel Glieder hat, wie Beobachtungsjahre vorliegen, kann von der Gültigkeit dieser Voraussetzung keine Rede sein.

Ferner setzt die Wahrscheinlichkeitsrechnung voraus, daß jeder Versuch des Kollektivs unter den gleichen Voraussetzungen gemacht wird. Die q_ν sind aber wesentlich von der Struktur der Gesellschaft abhängig, und es erscheint sehr gewagt anzunehmen, daß diese dieselbe sei wie vor beispielsweise 20 Jahren. Dieser Fehler wird auch nicht vermieden, wenn man die Beobachtungen anderer Gesellschaften (die doch sicherlich wieder anders zusammengesetzt sind) heranzieht.

Schließlich: Wie soll eine neu gegründete oder eine noch junge Gesellschaft ihre Risiken abschätzen können?

Und vor allem: Da dieses empirische Verfahren die Struktur der Gesellschaft überhaupt nicht berücksichtigt, bietet es auch keine Möglichkeit, auf alle diesbezüglichen Fragen einzugehen, gibt also keine Folgerungen für die Rückversicherung, den Selbstbehalt, den Einfluß von Änderungen in der Struktur usw.

All das stellt uns vor die Forderung, die Risikotheorie strenger und wissenschaftlicher aufzuziehen und das Verfahren so zu entwickeln, daß die Struktur der Gesellschaft eingeführt wird und wir einen mathematischen Ausgangspunkt für die Behandlung der diesbezüglichen Fragen gewinnen.

Wir müssen also unsere Theorie auf die Statistiken der das Risiko beeinflussenden Größen aufbauen. Das sind:

a) die mittlere Schadenanzahl λt im zugrunde gelegten Zeitabschnitt $0, \ldots, t$;

b) die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der relativen Schadenhöhen;

c) die Verteilungsfunktion $S(\sigma)$ der Versicherungssummen;

d) die Verteilung der Gefahrenklassen.

Unter Gefahrenklasse verstehen wir hierbei die Menge aller der Objekte, die die gleiche Verteilung der Schadenhöhen haben. Diese Objekte stellen die Versicherungseinheiten dar. Sie als gleich groß anzunehmen, ist hier nicht nötig.

a) und c) sind leicht angebbar. Bei d) muß man sich darüber klar sein, daß die Einteilung nach Gefahrenklassen nur eine mehr oder weniger rohe Zusammenfassung darstellt; hier geht aber schon lange das Bestreben dahin, diese zu verfeinern. Dagegen ist es schwieriger, aber bei geeigneten Maßnahmen durchaus möglich, b) zu beobachten. Da aber b) auch für andere Probleme, z. B. Franchisen, eine wichtige

Rolle spielt, müssen wir seine Kenntnis voraussetzen. Auch GÜRTLER [19]) betont die Bedeutung von b) und stellt die Verteilung durch den Namen Schadentafel in Analogie zur Sterbetafel. Hier muß eben die praktische Statistik den Erfordernissen der Mathematik folgen, will sie nicht durch ihr Zurückbleiben jede einwandfreie Kalkulation verhindern.

Was die Verteilung $H(x) = \lambda t \Phi(x)$ der absoluten Häufigkeiten der Schäden anbelangt, so müssen wir noch beachten, daß sie sich in vielen Versicherungszweigen infolge Rückganges alter und Aufkommens neuer Gefahrenquellen mit der Zeit ändert. Jeder Versicherer, ob er sich nun mathematischer Methoden bedient oder nicht, ist daher gezwungen, Untersuchungen über diese Änderungen und ihre Ursachen anzustellen und auf Grund dieser eine Verteilung $H(x)$ so anzunehmen, daß die wirklich eintretende Häufigkeitsverteilung des Rechnungsjahres sicherlich günstiger liegt. Wir nehmen daher auch hier $H(x)$ auf Grund solcher Untersuchungen als „vorsichtig gewählt" an; unsere Ergebnisse haben somit den Charakter von Schranken für die Versicherungswerte, die nach Annahme einerseits sicherlich ausreichen, andererseits aber wirklich benutzt werden müssen. Von den zwei Fehlerquellen der Berechnung der Versicherungswerte, der mangelnden Kenntnis und der ungenügenden Verarbeitung der Rechnungsgrundlagen, läßt sich nur die zweite ausschalten; im Rahmen des Möglichen liefert daher die mathematische Behandlung immer noch die sichersten Ergebnisse. Außerdem erlauben unsere Formeln, die durch eine etwaige Schwankung der Rechnungsgrundlage $H(x)$ um $\Delta H(x)$ — d. h. also von Ψ_ν um $\Delta \Psi_\nu = \int_0^\infty x^\nu d(\Delta H)$ — verursachte Änderung der Versicherungswerte nach den Gesetzen der Fehlerfortpflanzung abzuschätzen.

§ 3. Die Berechnung der Schadenverteilung Φ aus der Struktur der Gesellschaft.

Wir hatten uns vorgenommen, die Verteilungsfunktion $W(x)$ des Gesamtschadens für einen beliebig zusammengesetzten Versicherungsbestand zu ermitteln. Wir wollen dabei in der Weise vorgehen, daß wir zuerst einen sehr speziellen Bestand betrachten und uns dann dadurch, daß wir eine einschränkende Annahme nach der anderen fallen lassen, auf den allgemeinsten Bestand hinarbeiten. Damit werden wir unsere

19) A. a. O. 3), S. 20.

Absicht, die Struktur der Gesellschaft in die Formeln einzuführen, wahr machen.

Zunächst nehmen wir an:

α) der Gesamtversicherungsbestand umfasse nur eine einzige Gefahrenklasse;

β) die Versicherungssummen seien alle gleich;

γ) die Schadenereignisse seien voneinander unabhängig.

Unter diesen Voraussetzungen wird das Risiko ausschließlich bestimmt von der mittleren Schadenhäufigkeit λt, die der Menge der Versicherungen proportional ist, und der Verteilung $\Phi(x)$ der Schadenhöhen. Das Problem des Gesamtschadens ist aber das Problem des ersten Teiles. Die Verteilungsfunktion $W(x)$ kann damit auf die dort angegebenen Weisen bestimmt werden.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung α) fallen. Zunächst nehmen wir an, es gebe zwei Gefahrenklassen (a) und (b) mit den Schadenhäufigkeiten $\lambda_a t$ und $\lambda_b t$ und den Schadentafeln Φ_a und Φ_b.

Wir setzen $$H_a = \lambda_a t \Phi_a, \quad H_b = \lambda_b t \Phi_b.$$

$W_a(x)$ und $W_b(x)$ seien die Verteilungsfunktionen des Gesamtschadens jeder Klasse. Die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens beider Klassen, d. h. des Gesamtschadens der Gesellschaft ist

$$W(x) = \int_0^\infty W_a(x-\xi)\, d\, W_b(\xi).$$

$[w_a]$, $[w_b]$ und $[w]$ seien die Erzeugenden von W_a, W_b und W. Nach dem schon mehrfach benutzten Satz ist

$$[w] = [w_a]\,[w_b]$$

oder, da nach (7)

$$[w_a] = e^{-\lambda_a t}\, e^{\int_0^\infty z^x\, d\, H_a(x)}, \qquad [w_b] = e^{-\lambda_b t}\, e^{\int_0^\infty z^x\, d\, H_b(x)}$$

ist, so folgt $$[w] = e^{-\lambda t}\, e^{\int_0^\infty z^x\, d\, H(x)}$$

mit

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} \lambda = \lambda_a + \lambda_b, \\ H(x) = H_a(x) + H_b(x). \end{cases}$$

Durch Induktion auf mehr Gefahrenklassen können wir folgern:

Die mittlere Anzahl λt und die Häufigkeitsverteilung $H(x)$ der Schäden eines Versicherungsbestandes sind die Summe der mittleren Anzahlen

$\lambda_\nu t$ bzw. der Häufigkeitsverteilungen $H_\nu(x)$ der Schäden in den einzelnen Gefahrenklassen (ν).

Eine genauere Unterteilung des Versicherungsbestandes in bezug auf die einzelnen Gefahrenklassen erschwert also die Rechnung nicht.

Wir wollen jetzt die Annahme $\beta)$ noch fallen lassen: Weiter bleibt wesentlich, daß alle Objekte einer Gefahrenklasse (ν) dieselbe Schadentafel Φ_ν haben.

Die Verteilung der Versicherungssummen in der Gefahrenklasse (ν) sei durch $S_\nu(\sigma)$ gegeben, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die Versicherungssumme eines Objektes $\leqq \sigma$ ist, sei $S_\nu(\sigma)$.

Jetzt interessiert uns als Schaden nicht mehr die relative Schadenhöhe, sondern die von der Gesellschaft auszuzahlende Summe z, die das Produkt aus der relativen Schadenhöhe x und der Versicherungssumme σ ist:

$$z = x\sigma. \tag{35}$$

Wir suchen daher jetzt die Verteilung $L_\nu(z)$ der auszuzahlenden Summen. Setzen wir

$$x = \ln x, \quad \sigma = \ln \sigma, \quad \bar{z} = \ln z,$$

so wird

$$\bar{\Phi}_\nu(\bar{x}) = \Phi_\nu(e^{\bar{x}}) = \Phi_\nu(x)$$

die Summenverteilung von x. Die Verteilungen S und L erklären wir entsprechend.

Aus (35) folgt nun

$$L_\nu(\bar{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}_\nu(z - \bar{\xi})\, d S_\nu(\bar{\xi})$$

oder für die Verteilung der auszuzahlenden Summen

$$L_\nu(z) = \int_{\xi=0}^{\infty} \Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right) d S_\nu(\xi), \tag{36}$$

$$d L_\nu(z) = \int_{\xi=0}^{\infty} d\,\Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right) d S_\nu(\xi).$$

Für die Auszahlungsverteilung $L(z)$ des Gesamtbestandes gilt nach (34)

$$\lambda t\, L(z) = \sum_\nu \lambda_\nu t\, L_\nu(z).$$

Statt $\lambda t \Phi$ geht jetzt $\lambda t L$ in die Rechnung ein, statt $\Psi_n^{(\nu)}$

$$\Pi_n^{(\nu)} = \lambda_\nu t \int_0^\infty z^n \, dL_\nu(z).$$

Der Index ν bezeichnet die Gefahrenklasse (ν).

Zur praktischen Rechnung ist es aber gar nicht erst erforderlich, die Verteilung $L(z)$ zu bestimmen; denn $\Pi_n^{(\nu)}$ läßt sich aus $\Psi_n^{(\nu)}$ und

$$\Sigma_n^{(\nu)} = \int_0^\infty \sigma^n \, dS_\nu(\sigma) \tag{37}$$

sehr einfach berechnen. Es ist nämlich

$$\Pi_n^{(\nu)} = \lambda_\nu t \int_0^\infty z^n \, dL_\nu(z) = \lambda_\nu t \int_{z=0}^\infty \left(z^n \int_{\xi=0}^\infty d\Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right) dS_\nu(\xi) \right)$$

$$= \lambda_\nu t \int_0^\infty \int_0^\infty z^n \, d\Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right) dS_\nu(\xi) = \lambda_\nu t \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{z}{\xi}\right)^n \xi^n \, d\Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right) dS_\nu(\xi)$$

$$= \int_0^\infty \xi^n J(\xi) \, dS_\nu(\xi)$$

mit

$$J(\xi) = \lambda_\nu t \int_{z=0}^\infty \left(\frac{z}{\xi}\right)^n d\Phi_\nu\left(\frac{z}{\xi}\right).$$

Bei der Substitution

$$\frac{z}{\xi} = u$$

wird

$$J(\xi) = \lambda_\nu t \int_0^\infty u^n \, d\Phi_\nu(u) = \Psi_n^{(\nu)},$$

also

$$\Pi_n^{(\nu)} = \int_0^\infty \xi^n \Psi_n^{(\nu)} \, dS_\nu(\xi) = \Psi_n^{(\nu)} \Sigma_n^{(\nu)}.$$

Nach (34) gilt daher für die Größen Π_n des Gesamtbestandes

$$\Pi_n = \Psi_n^{(a)} \Sigma_n^{(a)} + \Psi_n^{(b)} \Sigma_n^{(b)} + \cdots. \tag{38}$$

Sind versicherte Objekte durch Quotenrückversicherung rückgedeckt, so setzen wir $S_\nu(\sigma)$ als Verteilung der selbstgehaltenen Summen ein. Bei Exzedenten-Rückversicherungen, desgleichen bei Versicherungen auf erstes Risiko und solchen mit Franchisen muß auf eine richtige Verwendung der Schadentafel geachtet werden. Man muß

solche Versicherungen — ähnlich der Gruppenrechnung in der Lebensversicherung — zu eigenen Gefahrenklassen zusammenfassen. P ist dabei der Teil der Nettoprämie, der auf die selbstgehaltenen Risiken entfällt, d. h. Gesamtnettoprämie minus Nettoprämie an den Rückversicherer.

Bei Vorkommen hoher selbstgehaltener Versicherungssummen wachsen die Σ_ν — also auch die Π_ν — mit wachsendem ν sehr stark an, die Verteilung W der Gesamtschäden ist stark nach rechts ausgezogen. Durch Rückversicherung dieser Summen wird die Verteilung W mehr der Gauss schen angeglichen; die Bruns sche Reihe und Formel (38) ermöglichen es uns, die Stärke dieser Angleichung zahlenmäßig zu ermitteln.

Zum Schlusse lassen wir in gewisser Hinsicht die Annahme γ) fallen und haben uns so auf das Bild, das jeder wirkliche Versicherungsbestand bietet, hingearbeitet. Zu diesem Zwecke definieren wir den Begriff Schaden anders als bisher üblich folgendermaßen:

Ein Schadenausbruch mit allen durch ihn mittelbar verursachten Schäden wird als *ein* Schaden gezählt. Also ein Hausbrand, der zwei andere Gebäude ansteckt, wird als *ein* Brand mit der Schadenhöhe 3 (wenn alle Häuser die Schadenhöhe 1 haben) gezählt. Die Schadenhöhe kann gelegentlich auch größer als 1 sein. Bei dieser Definition sind die Schadenereignisse voneinander unabhängig, und wir können auch hier die Verteilung der Gesamtschäden durch die erweiterte Poisson sche Formel bestimmen. E_S zeigt sich dabei, daß infolge der Möglichkeit größerer Schadenhöhen die Ψ_ν mit wachsendem ν sehr stark anwachsen und daß daher die Verteilung $W(x)$ des Gesamtschadens stark nach rechts ausgezogen ist. Die Schiefe der Verteilungen ansteckender Ereignisse ist damit auf die Schiefe der Poisson schen Verteilungen zurückgeführt.

Unser Verfahren ist also auch in der Feuerversicherung anwendbar, sofern zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die versicherten Objekte dürfen nicht zu stark zusammengeballt sein; denn die Schadentafeln zusammengedrängter Objekte sind nicht bekannt, und die Reihenentwicklung der Verteilung des Gesamtschadens konvergiert nach der eben gemachten Bemerkung nur sehr langsam.

2. Die Ausbruchwahrscheinlichkeit der Schäden muß zeitlich möglichst konstant sein; denn wir hatten bei der Ableitung unserer Formeln λ als Konstante angenommen. Bei der Versicherung von Massivhäusern oder Industrieanlagen ist das zum größten Teil erfüllt.

§ 4. Die Berechnung der Verteilungsfunktion W des Gesamtschadens aus der Verteilung Φ der Schadenhöhen.

Ist die Funktion $\Phi(x)$ bzw. bei ungleichen Versicherungssummen $L(z)$ nach § 3 ermittelt, so ist die Bestimmung der Verteilung W des Gesamtschadens das dem ersten Teil zugrundeliegende Problem. Die dort entwickelten Verfahren — Formeln (12), (25) und (32′) — sind damit anwendbar.

Um bei Existenz der Verteilungsdichten $\frac{dH}{dx}$ und $\frac{dS}{d\sigma}$ die Ψ_ν und Σ_ν möglichst schnell instrumentell bestimmen zu können, wird folgendes Verfahren vorgeschlagen: Man zeichne die Geradenschar $y = \text{const}\ x$ und Parabelscharen $y = \text{const}\ x^\nu$ (vgl. Abb. 2 für $\nu = 1$ und Abb. 3

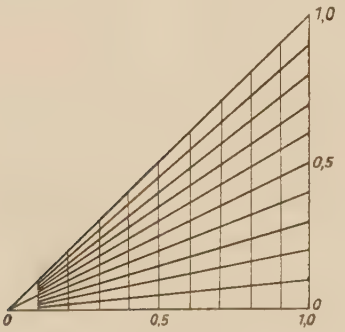

Abb. 2.

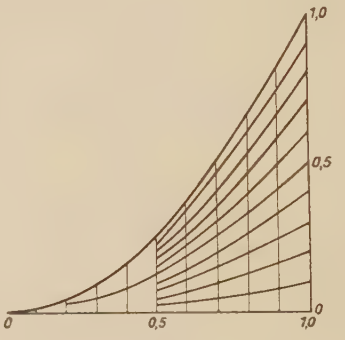

Abb. 3.

für $\nu = 2$) und trage in diesen Koordinaten die Funktionen $\frac{dH}{dx}$ und $\frac{dS}{d\sigma}$ ein. Dann kann man Ψ_ν und Σ_ν sofort mit Hilfe des Integraphen bestimmen.

§ 5. Die Berechnung der Risikogrößen aus der Verteilung W des Gesamtschadens.

Ist die Funktion W erst einmal berechnet, so ist jedes Problem der Risikotheorie lösbar:

Ist P die Gesamtnettoprämie, R die Sicherheitsrücklage, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß P und R zur Deckung der entstandenen Versicherungsschäden ausreichen, d. h. daß die Gesellschaft keinen Verlust erleidet,

$$1 - u = W(P + R)$$

oder bei Einführung der durch

$$y = c_1 (x - \Psi_1), \qquad c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\Psi_2}}$$

der Gausschen Verteilung angeglichenen Verteilung $V(y)$ (vgl. (20))

$$1 - u = V(c_1(P + R - \Psi_1)) = V(c_1 R),$$

da $P = \Psi_1$ ist. Dabei ist u eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit. Im beliebigen inhomogenen Versicherungsbestand tritt an Stelle von Ψ_ν das durch (38) eingeführte Moment Π_ν.

Ist das Versicherungsgeschäft so beschaffen, daß ein Deckungskapital gebildet wird, und ist D das Gesamtdeckungskapital — D ist ja ohne weiteres aus der Bilanz zu entnehmen — so können wir D ebenfalls als eine Rücklage auffassen. Wir setzen dann $R + D$ statt R in die Formeln ein.

Das Hauptproblem der Risikotheorie ist das folgende:

Vorgegeben ist eine feste Wahrscheinlichkeit u. Zur Prämie P soll ein Risikoaufschlag ϱP so bestimmt werden, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Prämie P, Rücklage R (eventuell auch Deckungskapital D) und Risikozuschlag ϱP zur Deckung des Gesamtschadens nicht ausreichen, höchstens gleich u ist. Die Größe des Wertes u ist umstritten. Burrau schlägt für u den Wert $u = 0{,}000\,03$ vor, dem bei der Gaussschen Kurve der Wahrscheinlichkeit eine Abweichung von mindestens dem Vierfachen der Streuung entspricht.

Wir haben also ϱ aus der Gleichung

$$W(P + \varrho P + R + D) = 1 - u \tag{39}$$

oder

$$V(c_1(\varrho P + R + D)) = 1 - u \tag{39'}$$

zu bestimmen. Diese Gleichung läßt sich nach einem Näherungsverfahren auflösen. Dieses Problem haben wir in unseren Beispielen (§ 6) durchgerechnet. Ebenso behandeln wir den Fall, daß ϱ vorgegeben ist und R bestimmt werden soll.

Die Fragen der Rückversicherung, des maximalen Selbstbehaltes usw. lassen sich nach unserem Verfahren ebenfalls behandeln. So läßt sich, um nur ein Beispiel zu nennen, die Prämie der Jahresschadenexzedentenversicherung (excess of loss) über den Gesamtschaden r als das bei Verwendung der Bruns schen Reihe explizit auswertbare Integral

$$\int_r^\infty (x - r)\, dW(x) = \int_0^\infty x\, dW(x + r)$$

darstellen.

§ 6. Beispiele.

Wir wollen die Ergebnisse der Theorie durch Beispiele erläutern, um so ihre Anwendbarkeit auf die Praxis zu prüfen.

Wir nehmen eine Modellgesellschaft an mit den Schadenklassen (a) und (b), die die Schadentafeln haben:

x	φ_a	φ_b	x	φ_a	φ_b
0,1	0,20	0,50	0,6	0,05	0,01
0,2	0,15	0,25	0,7	0,05	0,01
0,3	0,10	0,10	0,8	0,10	0,01
0,4	0,05	0,05	0,9	0,10	0,02
0,5	0,05	0,01	1,0	0,15	0,04

(In (b) treten vorwiegend Kleinschäden auf.)

Die Verteilung der selbstgehaltenen Versicherungssummen sei

1. überall 1,

2. durch die folgende arithmetische Verteilung gegeben, wobei $s(\sigma)$ die Sprunghöhe von $S(\sigma)$ ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Versicherungssumme gleich σ ist:

σ	$s_a(\sigma)$	$s_b(\sigma)$	σ	$s_a(\sigma)$	$s_b(\sigma)$
0,1	0,00	0,00	1,0	0,30	0,25
0,2	0,00	0,00	1,2	0,10	0,15
0,3	0,01	0,00	1,4	0,05	0,10
0,4	0,02	0,00	1,6	0,05	0,05
0,5	0,15	0,10	1,8	0,03	0,00
0,6	0,02	0,00	2,0	0,05	0,00
0,7	0,05	0,05	2,2	0,01	0,00
0,8	0,05	0,15	2,4	0,01	0,00
0,9	0,10	0,15			

Die mittlere Schadenanzahl λ in der Zeiteinheit sei in beiden Klassen 1% der Zahl N der Versicherungen.

Die Zahl N der Versicherungen betrage

A. in der Klasse (a) $N =$ 1 000 in (b) $N =$ 2 000 oder:
B. „ „ „ „ 10 000 „ „ 20 000 oder:
C. „ „ „ „ 100 000 „ „ 200 000 Versicherungen.

Es genügt in allen Fällen, die erweiterte POISSONsche Verteilung durch die BRUNSsche Reihe zu bestimmen.

A. 1. Wir erhalten für die Momente Ψ_ν der Verteilung der Schadenhöhen

$$\Psi_1 = 9{,}78 = \text{Gesamtprämie } P,$$
$$\Psi_2 = 5{,}862,$$
$$\Psi_3 = 4{,}6548,$$
$$\Psi_4 = 4{,}086\,90,$$
$$\Psi_5 = 3{,}738\,71,$$
$$\Psi_6 = 3{,}493\,30,$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\Psi_2}} = 0{,}292\,052\,.$$

Abb. 4. Fall A. 1.

Daraus ergibt sich nach (32′) für die Koeffizienten der Bruns schen Reihe der normierten Verteilungsfunktion $V(y)$ der Gesamtschäden:

$$a_3 = -\,0{,}019\,326,$$
$$a_4 = +\,0{,}001\,239,$$
$$a_5 = -\,0{,}000\,066,$$
$$a_6 = +\,0{,}000\,190,$$
$$(a_7 = -\,0{,}000\,024).$$

A. 2. In diesem Falle müssen wir die Momente Π_ν der Verteilung $L(z)$ der Auszahlungen des Gesamtbestandes nach (38) berechnen. Wir erhalten

$$\Pi_1 = 9{,}901\,5 = P, \qquad \Pi_4 = 9{,}766\,90,$$
$$\Pi_2 = 6{,}955\,51, \qquad \Pi_5 = 14{,}748\,75,$$
$$\Pi_3 = 7{,}405\,97, \qquad \Pi_6 = 24{,}521\,25$$

und weiter

$$c_1 = 0{,}268\,117,$$
$$a_3 = -0{,}023\,790,$$
$$a_4 = +0{,}002\,103,$$
$$a_5 = -0{,}000\,171,$$
$$a_6 = +0{,}000\,296,$$
$$(a_7 = -0{,}000\,051).$$

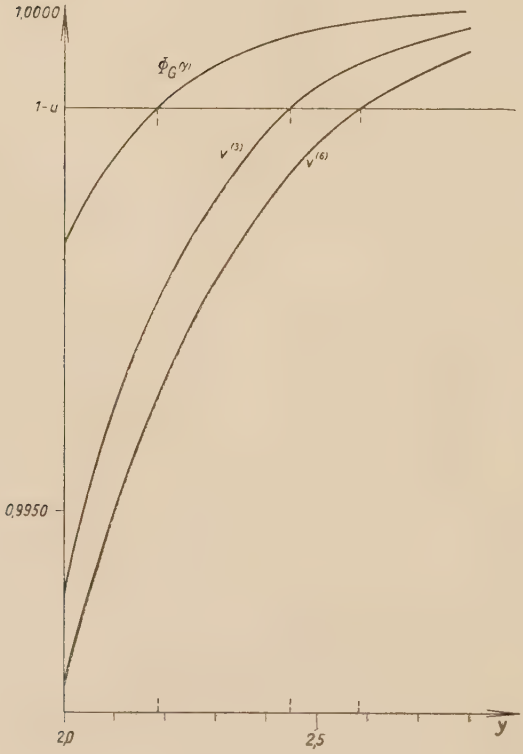

Abb. 5. Fall A. 2.

Wie man sieht, weicht $V(y)$ noch stark von der GAUSSschen Verteilung ab. Die BRUNSsche Reihe konvergiert im Falle A. am langsamsten, ist jedoch für die Rechnung immer noch brauchbar.

Für noch kleinere λt würde man zweckmäßig $L(z)$ nach (36) ermitteln und $W(x)$ nach den Rekursionsformeln (12) bzw. (12′) berechnen, will man sich nicht mit Abschätzungen — so z. B. durch die TSCHEBYSCHEFFsche Treppenfunktion — begnügen.

Es zeigt sich, daß in diesen beiden Fällen die Verlustwahrscheinlichkeiten zu groß, bzw. die notwendigen Risikozuschläge zu hoch sind, als daß diese Gesellschaften wirtschaftlich arbeiten könnten; sie sind eben zu klein.

Bedeutend bessere Ergebnisse erhalten wir in den Fällen B. und C., wo die Gesellschaften größer sind und wir den tatsächlichen Zahlenverhältnissen der Praxis näherkommen:

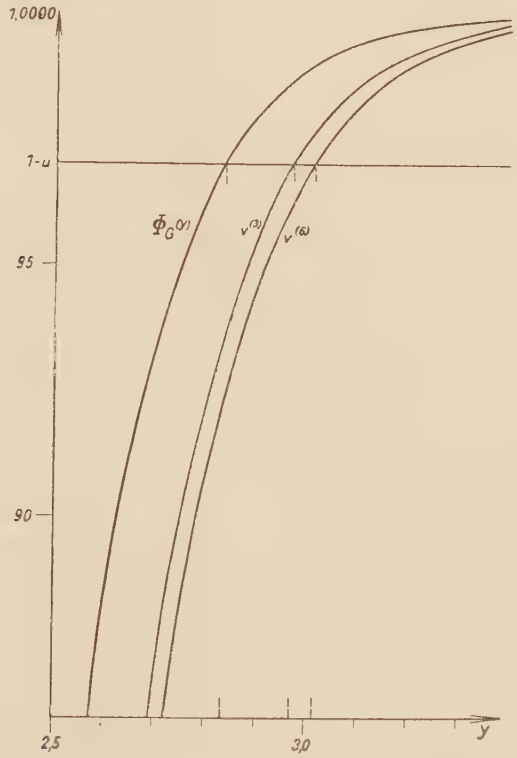

Abb. 6. Fall B. 1.

B. 1. $\Psi_1 = 97{,}8 = P$, $\Psi_4 = 40{,}869\,0$,
$\Psi_2 = 58{,}62$, $\Psi_5 = 37{,}387\,08$,
$\Psi_3 = 46{,}548$, $\Psi_6 = 34{,}933\,00$.

$$c_1 = \quad 0{,}092\,355,$$
$$a_3 = -\,0{,}006\,111\,3,$$
$$a_4 = +\,0{,}000\,123\,9,$$
$$a_5 = -\,0{,}000\,002\,1,$$
$$a_6 = +\,0{,}000\,018\,6,$$
$$(a_7 = -\,0{,}000\,000\,8).$$

Wir brachen nach dem Glied a_6 ab, da a_6 nach (33) von größerer Ordnung in bezug auf λt ist als a_5. Des Vergleiches halber ist auch noch a_7 berechnet.

B. 2. $\Pi_1 = 99{,}015\,0 = P$, $\Pi_4 = \quad 97{,}669\,0$,
$\Pi_2 = 69{,}555\,1$, $\Pi_5 = 147{,}487\,5$,
$\Pi_3 = 74{,}059\,7$, $\Pi_6 = 245{,}212\,5$.

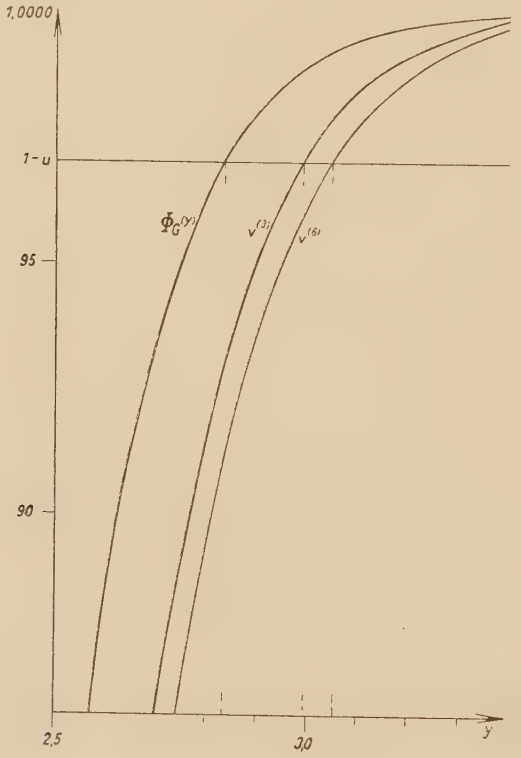

Abb. 7. Fall B. 2.

$$c_1 = \quad 0{,}084\,786,$$
$$a_3 = -\,0{,}007\,523\,0,$$
$$a_4 = +\,0{,}000\,210\,3,$$

$$a_5 = -\,0{,}000\,005\,4,$$
$$a_6 = +\,0{,}000\,028\,3,$$
$$(a_7 = -\,0{,}000\,001\,6).$$

C. 1. $\Psi_1 = 978 = P$, $\Psi_4 = 408{,}690$,
$\Psi_2 = 586{,}2$, $\Psi_5 = 373{,}871$,
$\Psi_3 = 465{,}48$, $\Psi_6 = 349{,}330$.

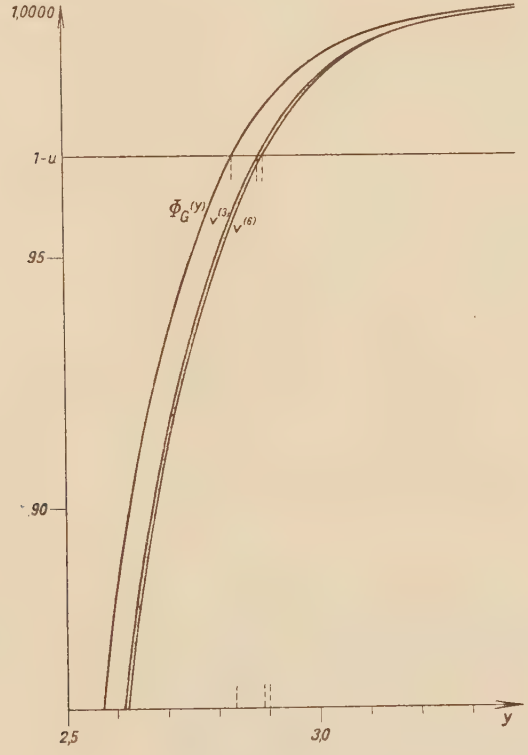

Abb. 8. Fall C. 1.

$$c_1 = \quad 0{,}029\,205\,2,$$
$$a_3 = -\,0{,}001\,933,$$
$$a_4 = +\,0{,}000\,012,$$
$$a_5 = -\,0{,}000\,000,$$
$$a_6 = +\,0{,}000\,002,$$
$$(a_7 = -\,0{,}000\,000).$$

C. 2. $\Pi_1 = 990{,}150 = P$, $\Pi_4 = 976{,}690$,
$\Pi_2 = 695{,}551$, $\Pi_5 = 1474{,}875$,
$\Pi_3 = 740{,}597$, $\Pi_6 = 2452{,}125$.

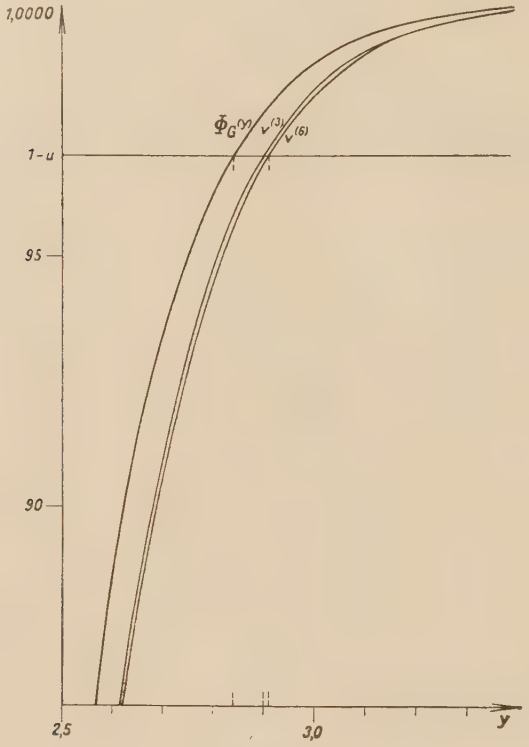

Abb. 9. Fall C. 2.

$c_1 = 0{,}026\,811\,7$,
$a_3 = -0{,}002\,379$,
$a_4 = +0{,}000\,021$,
$a_5 = -0{,}000\,000$,
$a_6 = +0{,}000\,003$,
$(a_7 = -0{,}000\,000)$.

Die durch diese BRUNSschen Reihen dargestellten Funktionen sind in den Abb. 4—9 wiedergegeben. Und zwar bezeichnet

Φ_G die GAUSSsche Kurve,

$V^{(3)}$ die Näherung $\Phi_G + a_3\Phi_G'''$,

$V^{(6)}$ die Näherung $\Phi_G + a_3\Phi_G''' + a_4\Phi_G^{(4)} + a_5\Phi_G^{(5)} + a_6\Phi_G^{(6)}$.

Diese Näherung ist in allen Fällen ausreichend; $V^{(7)}$, $V^{(8)}$, ... würden nur noch unwesentlich abweichen.

Der Risikozuschlag ϱP bestimmt sich nach (39) aus der Wurzel der Gleichung $V(y_0) = 1 - u$ durch

$$\varrho P = \frac{y_0}{c_1} - R - D.$$

Diese Gleichung ist graphisch aufgelöst in den Fällen B. und C. unter Annahme der Verlustwahrscheinlichkeit $u = 0{,}000\,03$, im Falle A., wo die Risikozuschläge viel zu hoch werden würden, ist $u = 0{,}001$ gesetzt. Ferner ist $R = D = 0$ angenommen.

Ergebnisse.

Beispiel:	ϱP	ϱ	Die Gauss sche Kurve würde den Risikozuschlag zu klein angeben, um
A. 1.	8,59	0,879	12,7%
A. 2.	9,66	0,976	15,5%
B. 1.	32,59	0,333	5,6%
B. 2.	35,98	0,363	6,9%
C. 1.	99,30	0,102	2,1%
C. 2.	108,6	0,110	2,4%

Ebenso können wir bei vorgegebenem Zuschlag ϱ die Höhe der Rücklage bestimmen, nach (39) ist

$$R = \frac{y_0}{c_1} - \varrho P - D.$$

§ 7. Zusammenfassung.

Wir hatten gesehen, daß die Ermittlung der Verteilung der Gesamtschäden durch Beobachtung der Jahresschadenquotienten unvollkommen ist (zu kleines Kollektiv, dessen Versuchsbedingungen ungleich sind, keine Berücksichtigung der speziellen Struktur der Gesellschaft und daher auch keine Möglichkeit, auf die diesbezüglichen Fragen des maximalen Selbstbehaltes, der Rückversicherungspolitik usw. einzugehen).

Die tatsächliche Verteilung $W(x)$ der Gesamtschäden wird durch die erweiterte Poisson sche Formel

$$W(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{(\lambda t)^k}{k!} \Phi_k(x)$$

gegeben und hängt von der speziellen Struktur der Gesellschaft ab.

Die numerische Berechnung dieser Verteilung geschieht folgendermaßen:

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Kleine Zahl λt von Schadenfällen: Die Berechnung geschieht durch die Rekursionsformeln (12) bzw. (12′);

b) Größere Zahl λt von Schadenfällen (das ist der Fall, der bei den Zahlenverhältnissen der Praxis ausschließlich vorkommen dürfte): Die Verteilung der Gesamtschäden wird durch die durch (20), (25) und (32′) bestimmte BRUNSsche Reihe dargestellt.

Einen beliebig zusammengesetzten Versicherungsbestand behandeln wir folgendermaßen: Wir fassen den Gesamtbestand der Versicherungen in Gefahrenklassen (a), (b), . . ., d. h. Klassen mit gleicher Schadentafel $\Phi_a(x)$, $\Phi_b(x)$, . . . zusammen. $S_a(\sigma)$, $S_b(\sigma)$, . . . seien die Verteilungen der Versicherungssummen in den Gefahrenklassen. Statt $\Phi(x)$ geht jetzt die Verteilung der Auszahlungen

$$\lambda t\, L(z) = \lambda_a t \int_0^\infty \Phi_a\left(\frac{z}{\sigma}\right) d\, S_a(\sigma) + \lambda_b t \int_0^\infty \Phi_b\left(\frac{z}{\sigma}\right) d\, S_b(\sigma) + \cdots$$

in die Rechnung ein. $L(z)$ braucht aber im Falle der BRUNSschen Reihenentwicklung gar nicht erst bestimmt zu werden; wir bilden die Nullpunktsmomente

$$\Psi_n^{(\nu)} = \lambda_\nu t \int_0^\infty x^n\, d\, \Phi_\nu(x), \quad \Sigma_n^{(\nu)} = \int_0^\infty \sigma^n\, d\, S_\nu(\sigma)$$

und gehen dann mit

$$\Pi_n = \Psi_n^{(a)} \Sigma_n^{(a)} + \Psi_n^{(b)} \Sigma_n^{(b)} + \cdots$$

statt mit Ψ_n in die Rechnung ein. Damit wird der Einfluß der Struktur der Gesellschaft deutlich.

Zugleich ist damit die Frage der Verwendbarkeit der GAUSSschen Verteilung gelöst: Für größere Zahlen von Schadenfällen konvergiert $W(x)$ tatsächlich gegen die GAUSSsche Verteilung mit dem Mittelwert

$$\Psi_1^{(a)} \Sigma_1^{(a)} + \Psi_1^{(b)} \Sigma_1^{(b)} + \cdots = \Pi_1$$

und der Streuung

$$\Psi_2^{(a)} \Sigma_2^{(a)} + \Psi_2^{(b)} \Sigma_2^{(b)} + \cdots = \Pi_2.$$

Für kleinere Werte von λt darf die Abweichung hiervon nicht vernachlässigt werden; die weiteren Glieder der BRUNSschen Reihe geben diese Abweichung explizit an, den Hauptanteil daran trägt das Glied $a_3 \Phi'''$.

Durch die Kenntnis der Verteilung $W(x)$ sind die darauf beruhenden Probleme lösbar; wir haben das an drei Beispielen gezeigt: Die Nettoprämie bestimmte sich als der Mittelwert von $W(x)$, wir erhielten die Formel

$$P = \lambda m_1 t.$$

Der Risikozuschlag ϱP bzw. die Rücklage R bestimmten sich durch die Gleichung

$$W(P + \varrho P + R + D) = 1 - u,$$

die Nettoprämie der Jahresschadenexzedentenversicherung über die Summe r durch das Integral

$$\int_r^\infty (x - r)\, dW.$$

Lebenslauf.

Am 19. Februar 1915 wurde ich, Wolf-Günter Ackermann, zu Frankfurt (Oder) geboren als Sohn des Rechtsanwalts Max Ackermann, der als Oberleutnant d. L. 1916 im Kriege blieb.

Von 1921 bis 1924 besuchte ich die Grundschule und von 1924 bis 1933 die Städtische Oberschule zu Frankfurt (Oder).

Nach bestandener Reifeprüfung bezog ich Ostern 1933 die Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin, um mich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Mein Interesse wandte sich aber im Laufe der Zeit immer mehr den Versicherungswissenschaften zu, so daß ich mein Studium auf angewandte und reine Mathematik und Staatswissenschaften richtete.

Vorlesungen hörte ich unter anderem bei den Herren Professoren Bieberbach, Feigl, Klose, Leitner, Moldenhauer, Riebesell, Rose, E. Schmidt, Sombart, W. Weber.

Mein besonderer Dank gilt den Herren Prof. Dr. Riebesell und Prof. Dr. Klose, die mir beide mit wertvollen Anregungen zur Seite standen.